TEV

Matematika tau +

10 klasė

1 dalis

TEV

Matematika tau +

10 klasė

2 dalis

Matematika tau+

10 klasė

1 dalis

TEV

Pagrindiniai skyreliai

Matematika tau+

Šis X klasės vadovėlis „Matematika Tau+“, kaip ir IX klasės vadovėlis, parengtas laikantis atnaujintų Pagrindinio ugdymo programų dvasios ir turinio. X klasės vadovėlio struktūra yra analogiška IX klasės vadovėlio struktūrai.

Prieš skyriaus turinio puslapį yra įvadas,
kurio tikslas – patraukliai supažindinti su tema, nagrinėjama šiame skyriuje.

Stipresniems mokiniams skirti skyreliai:

- **Pateikiama skyriaus teorijos santrauka ir pavyzdžiai.**
- **Uždavinių atverstiniai žinioms pagilinti ir įtvirtinti. Paskutiniai uždaviniai, pažymėti ženkleliu ?, skirti smalsesniems.**
- **Samprotavimai, įrodymai, uždaviniai, skirti tiems, kurie nori žinoti daugiau.**

Informacija mokiniui

Trupmeniniai raidiniai reiškiniai

Kam lygi trupmena?

Šiame skyriuje nagrinėsime trupmenas, kurių skaitiklyje ir vardiklyje yra raidžių:

$$\frac{a^2-1}{a+1},\quad \frac{a-b}{a^2-2ab+b^2},\ \ldots$$

- Mokysimės prastinti raidines trupmenas.
- Mokysimės skaidyti dauginamaisiais kvadratinį trinarį ax^2+bx+c.
- Mokysimės raidines trupmenas sudėti, atimti, dauginti ir dalyti.

Vadovėlio komplektą sudaro:

- vadovėlis (1 ir 2 dalys);
- pratybų sąsiuviniai;
- uždavinynas;
- savarankiškų ir kontrolinių darbų knygelės;
- pasirengimo egzaminui knygelės;
- kompiuterinės priemonės.

struktūra

***Mes kuriame** vadovėlius, orientuotus į ateitį, skirtus šiuolaikiškiems mokiniams ir kūrybingiems mokytojams. Kiekvienas TEV vadovėlių komplektas turi bent vieną kompiuterinę mokymo priemonę. Kiekvieno vadovėlio skaitmeninę versiją galima rasti internete.*

***Mes siekiame**, kad mokiniai ne tik skaitytų vadovėlio tekstą, bet ir dirbtų su vadovėliu, pasitelkę kompiuterines mokymo priemones, naudotųsi interneto ištekliais, bendrautų su mokytojais, taikytų informacinių technologijų pasiekimus ugdymo procese.*

***Mes norime**, kad mokytojai ne tik aktyviai naudotųsi prie vadovėlio priderintomis papildomomis mokymo priemonėmis, bet ir patys tobulintų vadovėlio turinį, diferencijuotų mokymą, integruotų matematiką su kitais dalykais, naudodami mobilias interaktyvias kompiuterines (MIKO) knygas, kurios įeina į kiekvienos klasės vadovėlių komplektą.*

Pagrindinių skyrelių atverstiniai, skirti visiems mokiniams:

- **Kairiajame puslapyje yra teorinė medžiaga. Ji pateikiama klausimais ir užduotimis, kurias atlikti padeda šauktukas ! ir klaustukas ?. Kas yra svarbiausia – surašyta lentoje.**
- **Dešiniajame puslapyje yra tik su tuo skyreliu susiję uždaviniai.**

Šios vadovėlio dalies pirmajame atverstinyje (p. 6, 7) trumpai apžvelgiama pagrindinės mokyklos algebros kurso struktūra. Čia primenama, ko buvo mokoma anksčiau, ir parodoma, kas nagrinėjama pirmoje vadovėlio dalyje.

Baigiamieji skyreliai padės:

- **Pasitikrinti, kaip pavyko suprasti ir įsiminti skyriuje nagrinėtus dalykus.**
- **Pasikartoti ankstesnę medžiagą ir pasirengti nagrinėti kitą skyrių.**

Antrojoje vadovėlio dalyje daugiausia dėmesio skiriama geometrijai, todėl pirmuosiuose atverstiniuose (p. 4–7) pateikiama pagrindinės mokyklos geometrijos kurso struktūra.

Mūsų tikslas buvo parengti vadovėlių komplektą – pagalbininką mokytojui, draugišką bet kuriam mokiniui. Kaip tai pavyko – sužinosime po kelerių metų, tačiau atsiliepimų, pastabų, kritikos laukiame visada. TEV vadovėlių komplektai nuolat atnaujinami ir tobulinami, todėl visa tai, kas padėtų pagerinti mūsų kūrinį, atsiras kituose leidimuose.

Ačiū Jums iš anksto!

Kaip atsirado matematika? Kaip ji vystėsi?

Pirmiausia žmonėms prisireikė natūraliųjų skaičių: $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Vėliau žmonės išmoko sudėti, dauginti, kelti laipsniu, pavyzdžiui:

$$2+3=5, \qquad 2\cdot 3=6, \qquad 2^3=8.$$

Daugyba — vienodų dėmenų trumpesnis užrašas, pvz., $2+2+2=2\cdot 3$.
Laipsnis — vienodų dauginamųjų trumpesnis užrašas, pvz., $2\cdot 2\cdot 2=2^3$.

Atimtis yra veiksmas, atvirkščias sudėčiai, dalyba — daugybai, šaknies traukimas — kėlimui laipsniu. Pavyzdžiui:

$$5-3=2, \qquad 6:3=2, \qquad \sqrt[3]{8}=2.$$

Ar teisingai:
- atimta, tikriname sudėdami: $5-3=2$, nes $2+3=5$;
- padalyta, tikriname daugindami: $6:3=2$, nes $2\cdot 3=6$;
- ištraukta šaknis, tikriname keldami laipsniu: $\sqrt[3]{8}=2$, nes $2^3=8$.

Dviejų natūraliųjų skaičių sumos, sandaugos ir laipsnio rezultatas visada yra natūralusis skaičius. Bet:
- atimant prisireikia skaičių, priešingų natūraliesiems, ir skaičiaus 0;
- dalijant prisireikia trupmeninių skaičių;
- traukiant šaknį — iracionaliųjų skaičių.

Pavyzdžiui:

$$2-5=-3, \qquad 2:3=\frac{2}{3}, \qquad \sqrt{2},$$
$$2-2=0; \qquad 5:2=2{,}5; \qquad \sqrt[3]{5}.$$

Iš skaičių, veiksmų ir skliaustų sudaromi skaitiniai reiškiniai, pavyzdžiui:

$$2\cdot 3-4,$$
$$(3^2-1)\cdot(-2).$$

Atlikę veiksmus, gauname reiškinio reikšmę.

Skaitiniame reiškinyje vietoj kurio nors skaičiaus parašę raidę, gauname reiškinį su vienu kintamuoju, pavyzdžiui,

$2\cdot x-4.$ *Rašoma*: $f(x)=2x-4$.

Reiškinio su kintamuoju reikšmė priklauso nuo kintamojo reikšmės.

Kai $x=3$, tai $2x-4=2\cdot 3-4=2$. *Rašoma*: $f(3)=2\cdot 3-4=2$.

Kai ieškome reiškinio $f(x)$ kintamojo x reikšmių, su kuriomis to reiškinio:
- reikšmė lygi kokiam nors skaičiui a, tai sprendžiame lygtį

$$f(x)=a;$$

- reikšmės yra mažesnės už a, tai sprendžiame nelygybę $f(x)<a$.

Tokių lygčių ir nelygybių pavyzdžiai:
$2+x=5$, $x-3=2$, $2\cdot x=6$, $x^3=8$, $\frac{6}{x}=2$, $\sqrt[3]{x}=2$;
$2+x<5$, $x-3>2$, $2\cdot x\leqslant 6$, $x^3\geqslant 8$, $\frac{6}{x}<2$, $\sqrt[3]{x}>2$.

Kai ieškome dviejų reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ kintamojo x reikšmių, su kuriomis:
- tų reiškinių reikšmės yra lygios, tai sprendžiame lygtį $f(x)=g(x)$;
- reiškinio $f(x)$ reikšmės yra ne mažesnės už reiškinio $g(x)$ reikšmes, tai sprendžiame nelygybę $f(x)\geqslant g(x)$.

Tokių lygčių ir nelygybių pavyzdžiai:
$2+x=2x$, $\frac{6}{x}=x-3$, $2+x>x^2$, $\frac{6}{x}\leqslant x$.

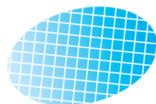
Reiškinio $f(x)$ reikšmių y priklausomybė nuo x reikšmių vadinama funkcine priklausomybe, arba funkcija.

Rašoma: $y=f(x)$.

Funkcijų pavyzdžiai: $y=x+3$, $y=3x$, $y=\frac{6}{x}$, $y=x^2+3x+1$.

Šioje vadovėlio dalyje:
- spręsime su procentais susijusius uždavinius (1 skyrius);
- mokysimės atlikti veiksmus su raidinėmis trupmenomis (2 skyrius);
- mokysimės spręsti trupmenines lygtis $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ (3 skyrius);
- mokysimės spręsti kvadratines nelygybes $ax^2+bx+c\gtrless 0$ (4 skyrius);
- nagrinėsime funkcijas $y=ax+b$, $y=\frac{a}{x}$, $y=ax^2+bx+c$ (5 skyrius).

Prieš pradėdami nagrinėti pirmą skyrių, prisiminkime, kaip sprendžiami procentų uždaviniai (žr. p. 8, 9).



Perkame išsimokėtinai

1. Parduotuvėje kabo skelbimas:

XXI amžius
2500 Lt

Pirkite kompiuterį „XXI amžius“ išsimokėtinai!
- Dabar mokėkite tik 400 Lt.
- Vienus metus kas mėnesį mokėkite po 200 Lt.

Naudokitės kompiuteriu jau šiandien!

Naudodamiesi reklaminio skelbimo duomenimis, apskaičiuokite:
1) kiek litų iš viso teks sumokėti už kompiuterį, perkamą išsimokėtinai;

Pradinė įmoka		Mėnesio įmoka		Įmokų skaičius		Suma
400 Lt	+	200 Lt	×	12	=	? Lt

2) keliais litais pabrangsta kompiuteris, perkamas išsimokėtinai;

Kaina, perkant išsimokėtinai		Kaina, mokant iš karto		Pabrangimo suma
? Lt	−	2500 Lt	=	?? Lt

3) kiek procentų pabrangsta kompiuteris, perkamas išsimokėtinai.

2500 Lt — 100 %,
?? Lt — x %; $\Rightarrow$ $x = \ldots$

2. Baldų komplektą galima įsigyti išsimokėtinai, sumokėjus 500 Lt pradinį įnašą ir vienus metus kas mėnesį mokant po 60 Lt. Kiek kainuoja baldų komplektas, perkamas iš karto, jei, perkamas išsimokėtinai, komplektas pabrangsta 22 %?

Prisiminkime:
1 % skaičiaus atitinka $\frac{1}{100} = 0{,}01$ to skaičiaus.
a % skaičiaus atitinka $\frac{a}{100}$ to skaičiaus.
a % skaičiaus galima apskaičiuoti tą skaičių dauginant iš $\frac{a}{100}$.

Pavyzdžiui: 1 % skaičiaus 500 yra $500 \cdot \frac{1}{100} = 5$;
6 % skaičiaus 500 yra $500 \cdot \frac{6}{100} = 30$.

Einame į banką

3. Ponią Zitą sudomino banko skelbimas:

PABLITAS

Padėkite indėlį į mūsų banką 1 metų laikotarpiui!
Mūsų banko metinių palūkanų norma lygi net 10 %!
Jei po metų indėlio neatsiimsite, tai indėlio terminas bus automatiškai pratęstas dar 1 metams!

Pasirinkite vieną iš dviejų indėlio termino pratęsimo rūšių:
- *Suma* — pratęsiant indėlio terminą, indėlio suma *nedidinama*, o priskaičiuotos palūkanos pervedamos į kliento sąskaitą;
- *Suma ir palūkanos* — pratęsiant indėlio terminą, indėlio suma yra *didinama* priskaičiuotomis palūkanomis*.

*Šiuo atveju kitų metų palūkanos bus skaičiuojamos nuo *priaugusio* indėlio.

Ponia Zita pasidėjo į „Pablito“ banką 1000 litų, sutarusi 10 % metinių palūkanų.
1) Kiek litų *palūkanų* gaus ponia Zita, jei ji indėlį atsiims po metų?
Kiek iš viso pinigų gaus ponia Zita iš banko po metų?

Pinigų suma, kurią bankas sumoka už jam paskolintus pinigus, vadinama ***palūkanomis***.
Banko mokamų palūkanų dydis nusakomas ***mėtinių palūkanų nòrma***.
Metinių palūkanų norma nurodoma procentais.

2) Kiek litų palūkanų gaus indėlininkė Zita, jei indėlį ji atsiims po 2 metų, o indėlio pratęsimo rūšis yra:
a) sumà? b) suma ir palūkanos?
Kiek iš viso pinigų gaus ponia Zita iš banko a) atveju? b) atveju?

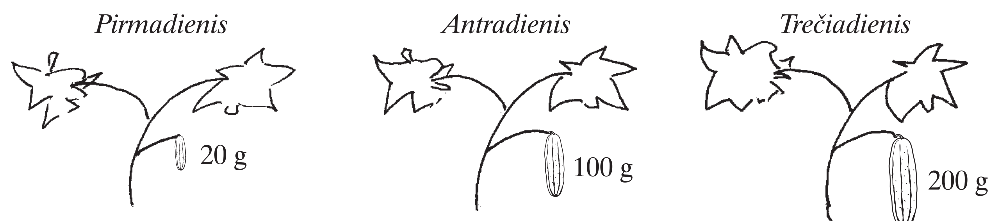
4. Bankas „Plius“ palūkanas skaičiuoja (vieną kartą per metus) nuo indėlio ir nuo priaugusių palūkanų sumos. Bankas moka 6 % metinių palūkanų. Kiek palūkanų sumokės bankas per 3 metus už indėlį, lygų:
a) 3000 Lt? b) 85 000 Lt? c) 3 600 000 Lt?

Kai palūkanos skaičiuojamos tik nuo indėlio, tai sakoma, kad skaičiuojamos ***pàprastosios palūkanos***.
Kai palūkanos skaičiuojamos ne tik nuo indėlio, bet ir nuo priaugusių palūkanų, tai sakoma, kad skaičiuojamos ***sudėtinės palūkanos***.

1 skyrius

Agurkas augdamas sunkėja, džiūdamas — lengvėja

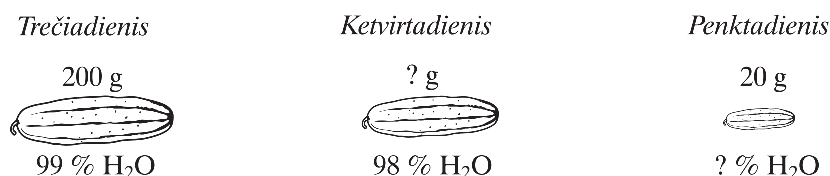
Agronòmas tyrinėjo agurkùs. Pirmadienį jis pasvėrė jau spėjusį truputį paaugti agurkėlį — šis svėrė 20 gramų. Antradienį to agurkėlio masė jau buvo lygi 100 gramų, o trečiadienį svarstyklės rodė 200 g.



1 užduotis.

Kiek kartų ir keliais procentais pasunkėjo agurkas:
1) nuo pirmadienio iki antradienio?
2) nuo antradienio iki trečiadienio?
3) nuo pirmadienio iki trečiadienio?

Agronomas, nuskynęs tą 200 gramų agurką, nustatė, kad jame yra net 99 % vandens. Tada jis tą agurką pradėjo džiovinti — garinti iš jo vandenį. Ketvirtadienį jau spėjusiame padžiūti agurke vandens tebuvo 98 %, o penktadienį agurkas jau buvo susitraukęs iki 20 gramų...

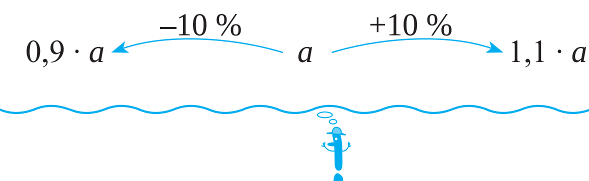


2 užduotis.

1) Kiek gramų svėrė agurkas ketvirtadienį?
2) Kiek procentų vandens buvo agurkėlyje penktadienį?
3) Kiek kartų ir keliais procentais sumažėjo agurko masė:
   a) nuo trečiadienio iki ketvirtadienio?
   b) nuo ketvirtadienio iki penktadienio?
   c) nuo trečiadienio iki penktadienio?

Nenusiminkite, jei nepavyko šių uždavinių išspręsti! Gal juos įveiksite išnagrinėję 1 skyrių?

Procentai



- Šiame skyriuje toliau mokysimės spręsti su pròcentais susijusius uždavinius.
- Mokysimės procentus „keisti“ kartais.
- Sužinosime, ką vadiname sudėtiniais pròcentais.
- Nagrinėsime situacijas, dažnai pasitaikančias gyvenime:
  – skolinimąsi,
  – pirkimą išsimokėtinai.

1.1. DIDINAME IR MAŽINAME

1 užduotis.
Onos alga buvo 1600 Lt. Kokia dabar yra Onos alga, jei ji ***padidėjo*** 25 %?

Kam lygus skaičius, kuris yra 25 % didesnis už 8?

1) Randame 25 % skaičiaus 8:

$$\frac{8}{100}\cdot 25 = 2.$$

2) Randame skaičių, kuris 25 % didesnis už 8:

$$8 + 2 = 10.$$

Pastaba. Sprendimą galima užrašyti taip:

$$8 + 8\cdot\frac{25}{100} = 8\cdot\left(1 + \frac{25}{100}\right) = 8\cdot(1 + 0{,}25) = 8\cdot 1{,}25 = 10.$$

Atsakymas. 10.

2 užduotis.
Jono alga buvo 2000 Lt. Kokia dabar yra Jono alga, jei ji ***sumažėjo*** 20 %?

Kam lygus skaičius, kuris yra 20 % mažesnis už 10?

$$10 - 10\cdot\frac{20}{100} = 10\cdot\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 10\cdot(1 - 0{,}2) = 10\cdot 0{,}8 = 8.$$

Atsakymas. 8.

Teigiamą skaičių A:
- ***padidinę*** p %, gauname $A + A\cdot\frac{p}{100} = A\cdot\left(1 + \frac{p}{100}\right)$;
- ***sumažinę*** p %, gauname $A - A\cdot\frac{p}{100} = A\cdot\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

$$200 \xrightarrow[\times\left(1+\frac{10}{100}\right)]{+10\,\%} 220 \xrightarrow[\times\left(1-\frac{10}{100}\right)]{-10\,\%} 198$$

5. Dviratis kainavo 800 Lt. Kokia dabar yra dviračio kaina, jei ji:
a) padidėjo 20 %? b) sumažėjo 10 %?
c) padidėjo 12 %? d) sumažėjo 12 %?

6. Į banko sąskaitą padėta 3500 Lt.
1) Kiek litų palūkanų bus gauta po metų, jei banko metinių palūkanų norma lygi: a) 5 %? b) 6 %? c) 8,5 %? d) 9,1 %?
2) Kokia pinigų suma bus sąskaitoje po metų kiekvienu atveju?

Jei nežinote, ką vadiname *palūkanomis* ir *metinių palūkanų norma*, tai galite pasiskaityti 9 puslapyje.

7. Skaičius B gaunamas skaičių A padidinus p procentų.
Kam lygus skaičius B, jei:
a) $A = 120$, $p = 20\,\%$? b) $A = 12{,}4$, $p = 5\,\%$? c) $A = \frac{2}{3}$, $p = 1\,\%$?

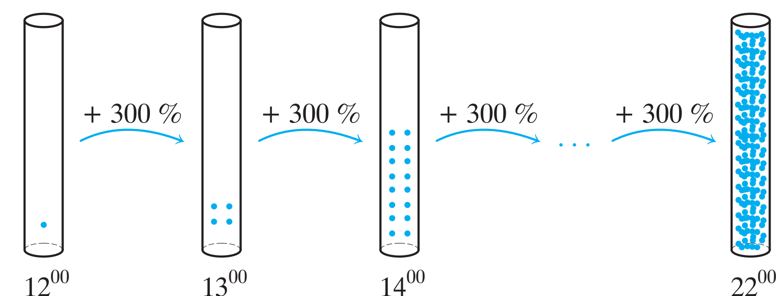
8. Skaičius A gaunamas skaičių B sumažinus p procentų.
Kam lygus skaičius A, jei:
a) $B = 120$, $p = 15\,\%$? b) $B = 3{,}3$, $p = 3\,\%$? c) $B = 10\frac{2}{5}$, $p = 7\,\%$?

9. Prekė kainavo 100 Lt. Kiek kainuoja prekė dabar, jei jos kaina keitėsi taip:
a) iš pradžių padidėjo 50 %, o tada sumažėjo 50 %?
b) iš pradžių sumažėjo 40 %, o tada padidėjo 40 %?
c) iš pradžių padidėjo 20 %, o tada vėl padidėjo 20 %?
d) iš pradžių sumažėjo 30 %, o tada sumažėjo 20 %?

10. Kiek pinigų reikia padėti į banką vieniems metams, norint gauti 1500 Lt palūkanų, jei banko metinių palūkanų norma lygi:
a) 4 %? b) 8 %? c) 7,5 %? d) 9 %?



11. Vidurdienį mėgintuvėlyje buvo 1 bakterija. Kas valandą bakterijų skaičius mėgintuvėlyje padidėja:
a) 100 %; b) 200 %; c) 400 %.
Kiek bakterijų bus mėgintuvėlyje 13 val.? 14 val.? 22 val.?



1.2. KIEK PROCENTŲ DAUGIAU? KIEK PROCENTŲ MAŽIAU?

Jono ūgis yra 2 metrai, Onos ūgis — 1,6 metro.

1 užduotis. Keliais procentais Jonas yra aukštesnis už Oną?

Keliais procentais skaičius 10 yra didesnis už skaičių 8?

Šį uždavinį išspręsime sudarydami proporciją.
Kadangi 10 *lyginame su* 8, tai 100 % atitinka skaičius 8:

$$\begin{matrix} 8 - 100\,\%, \\ 10 - x\,\%, \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{10} = \frac{100}{x}, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{100 \cdot 10}{8} = 125\,(\%).$$

Vadinasi, 10 už 8 yra didesnis $125\,\% - 100\,\% = \underline{25\,\%}$.

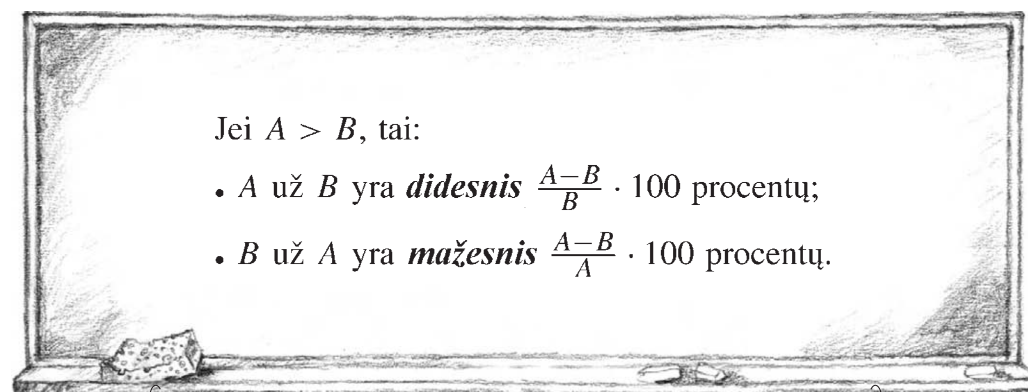
2 užduotis. Keliais procentais Ona yra žemesnė už Joną?

Keliais procentais skaičius 8 yra mažesnis už skaičių 10?

Kadangi 8 *lyginame su* 10, tai 100 % atitinka skaičius 10.
Sudarome proporciją:

$$\begin{matrix} 10 - 100\,\%, \\ 8 - x\,\%, \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{8} = \frac{100}{x}, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{100 \cdot 8}{10} = 80\,(\%).$$

Vadinasi, 8 už 10 yra mažesnis $100\,\% - 80\,\% = \underline{20\,\%}$.



- 10 už 8 yra didesnis $\frac{10-8}{8} \cdot 100\,\% = \frac{1}{4} \cdot 100\,\% = 25\,\%$;
- 8 už 10 yra mažesnis $\frac{10-8}{10} \cdot 100\,\% = \frac{1}{5} \cdot 100\,\% = 20\,\%$.

12. 1) Keliais procentais skaičius A yra didesnis už skaičių B, jei:

a) $A = 100,\ B = 80$? b) $A = 120,\ B = 100$?

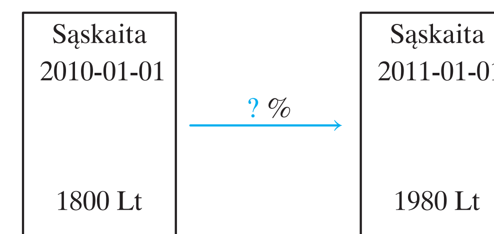
c) $A = 10,\ B = 5$? d) $A = 125,\ B = 25$?

2) Keliais procentais skaičius B yra mažesnis už skaičių A?

13. a) Batai atpigo nuo 350 Lt iki 280 Lt. Keliais procentais atpigo batai?
b) Batai pabrango nuo 280 Lt iki 350 Lt. Keliais procentais pabrango batai?

14. Spinta kainuoja 400 Lt, stalas — 320 Lt, kėdė — 200 Lt. Keliais procentais:
a) spinta yra brangesnė už stalą? už kėdę?
b) kėdė yra pigesnė už stalą? už spintą?
c) stalas yra brangesnis už kėdę? pigesnis už spintą?

15. a) Kokia yra banko metinių palūkanų norma, jei banke per metus 1800 Lt indėlis išaugo iki 1980 Lt?



b) Į banką padėjus 3000 Lt, po metų gauta 180 Lt palūkanų. Kokia to banko metinių palūkanų norma?

16. Žinoma, kad skaičius A yra didesnis už skaičių B, t. y. $A > B$. Įsitikinkime, kad A už B yra didesnis $\frac{A-B}{B} \cdot 100\,\%$.

I būdas. 1) $\begin{matrix} B - 100\,\%, \\ A - x\,\%; \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x\,\% = \frac{A}{B} \cdot 100\,\%.$

2) $x\,\% - 100\,\% = \frac{A}{B} \cdot 100\,\% - 100\,\% = \left(\frac{A}{B} - 1\right) \cdot 100\,\% = \frac{A-B}{B} \cdot 100\,\%.$

II būdas. A už B yra didesnis $A - B$ vienetų.
Randame, kurią skaičiaus B dalį sudaro skaičius $A - B$:

$$\frac{A-B}{B}, \quad \text{o procentais tai yra} \quad \frac{A-B}{B} \cdot 100\,\%.$$

Užduotis. Įsitikinkite, kad B už A yra mažesnis $\frac{A-B}{A} \cdot 100\,\%$.

1.3. PROCENTAI IR KARTAI

Lentelėje surašyta, kiek litų kainavo dviratis kiekvieną vasaros mėnesį.

MĖNUO	Birželis	Liepa	Rugpjūtis
KAINA	1000	1200	1080

1 užduotis.

1) Kiek procentų liepos mėnesio kaina didesnė už birželio mėnesio kainą?

2) Iš kokio skaičiaus padauginus birželio mėnesio kainą, gaunama liepos mėnesio kaina?

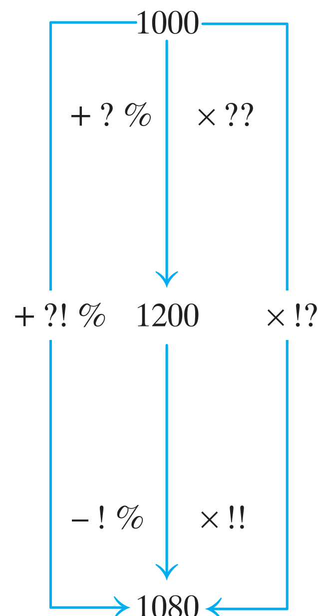
2 užduotis.

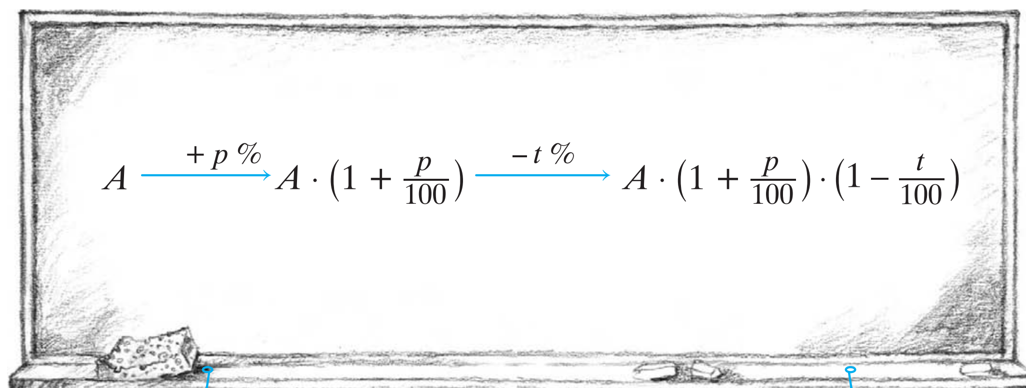
1) Kiek procentų rugpjūčio mėnesio kaina mažesnė už liepos mėnesio kainą?

2) Iš kokio skaičiaus padauginus liepos mėnesio kainą, gaunama rugpjūčio mėnesio kaina?

3 užduotis.

1) Iš kokio skaičiaus padauginus birželio mėnesio kainą, gaunama rugpjūčio mėnesio kaina?
2) Kiek procentų rugpjūčio mėnesio kaina didesnė už birželio mėnesio kainą?





200 —(+ 10 %, × 1,1)→ 220 —(– 10 %, × 0,9)→ 198

200 —(× 1,1 × 0,9)→ 198

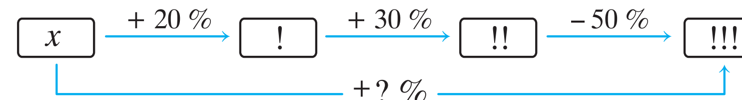
17. Duoti du skaičiai A ir B:
a) $A = 50$, $B = 40$; b) $A = 120$, $B = 90$; c) $A = 80$, $B = 20$.
1) Iš kokio skaičiaus padauginus B, gaunamas A? Keliais procentais A yra didesnis už B?
2) Iš kokio skaičiaus padauginus A, gaunamas B? Keliais procentais B yra mažesnis už A?

18. Kostas užrašė teigiamą skaičių x. Miglė tą skaičių padaugino iš 1,5. Antanas Miglės gautą skaičių padaugino iš 0,8. Keliais procentais:
a) Miglės skaičius yra didesnis už Kosto skaičių?
b) Antano skaičius yra mažesnis už Miglės skaičių?
c) Antano skaičius yra mažesnis (ar didesnis) už Kosto skaičių?

19. Jonas parašė programėlę, kuri, įvestą į kompiuterį, teigiamą skaičių A:
1) padidina 20 % ir išspausdina gautą skaičių B;
2) skaičių B padidina 10 % ir išspausdina gautą skaičių C;
3) skaičių C sumažina 50 % ir išspausdina gautą rezultatą D.

$A := 10$
$B = 12$
$C = 13{,}2$
$D = 6{,}6$

a) Kokius skaičius B, C ir D išspausdins programėlė, jei $A = 100$? $A = 1000$?
b) Kokie skaičiai turėtų būti parašyti vietoj debesėlių?



20. Pinigų kiekis banko sąskaitoje keitėsi taip: iš pradžių padidėjo dvigubai, tada padidėjo 50 % ir galiausiai sumažėjo trigubai. Kiek dabar banko sąskaitoje yra pinigų, jei iš pradžių joje buvo: a) 1000 Lt? b) 253,12 Lt? c) x Lt?

21. Keliais procentais padidėjo (ar sumažėjo) galutinė prekės kaina, palyginti su pradine, jei ji keitėsi taip:
a) iš pradžių padidėjo 50 %, o tada sumažėjo 50 %?
b) iš pradžių padidėjo 20 %, o tada padidėjo 30 %?
c) iš pradžių padidėjo 10 %, tada padidėjo 20 %, o galiausiai sumažėjo 30 %?

Prekė kainavo x Lt. Jos kaina keitėsi taip:
1) padidėjo 20 %; 2) padidėjo 30 %; 3) sumažėjo 50 %.

x —(+ 20 %)→ ! —(+ 30 %)→ !! —(– 50 %)→ !!!

x —(± ? %)→ !!!

Keliais procentais galutinė kaina skiriasi nuo pradinės?

Raskime galutinę prekės kainą:

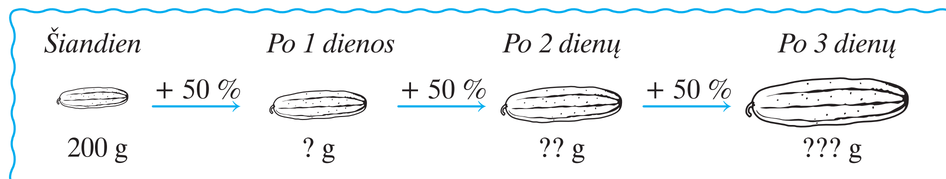
$! = x \cdot 1{,}2$; $!! = x \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}3$; $!!! = x \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}78 \cdot x$.

Matome, kad ji sudaro 78 % pradinės kainos.
Vadinasi, galutinė kaina yra 22 % mažesnė už pradinę.

1.4. SUDĖTINIŲ PROCENTŲ FORMULĖ

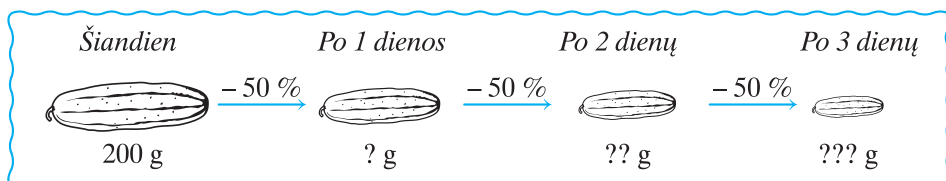
Šiltnamyje auga agurkas. Šiandien jis sveria 200 gramų.

1 užduotis. Agurkas kasdien vis priauga po 50 % dienos pradžioje buvusios masės.
1) Kiek svers agurkas po: a) 1 dienos? b) 2 dienų? c) 3 dienų?

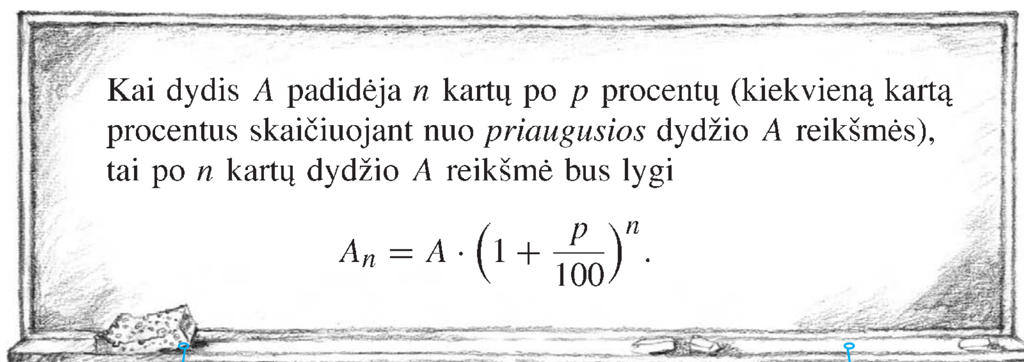


2) Įsitikinkite, kad po 3 dienų to agurko masė bus lygi $200 \cdot 1{,}5^3$ gramų.

2 užduotis. Tas 200 gramų agurkas nuskintas ir paliktas džiūti. Kasdien jo masė sumažėja po 50 % dienos pradžioje buvusios masės.
1) Kiek svers agurkas po: a) 1 dienos? b) 2 dienų? c) 3 dienų?

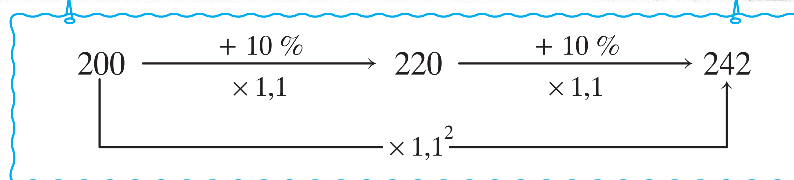


2) Įsitikinkite, kad po 3 dienų to agurko masė bus lygi $200 \cdot 0{,}5^3$ gramų.



Kai dydis A padidėja n kartų po p procentų (kiekvieną kartą procentus skaičiuojant nuo *priaugusios* dydžio A reikšmės), tai po n kartų dydžio A reikšmė bus lygi

$$A_n = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$



3 užduotis. Užrašykite formulę, kuria remiantis galima apskaičiuoti dydžio A reikšmę A_n, kai A *sumažėja* n kartų po p procentų.

22. Parodą pirmą dieną aplankė 4000 žmonių. Kiekvieną kitą dieną parodos lankytojų skaičius padidėdavo po 10 %, palyginti su prieš tai buvusios dienos lankytojų skaičiumi. Kiek žmonių aplankė parodą:
1) antrą dieną?
2) trečią dieną?
3) per visas keturias parodos dienas?

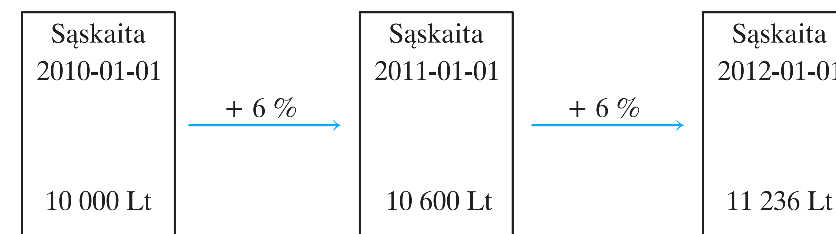
23. Automobilevičių šeima prieš 3 metus nusipirko naują automobilį už 36 000 litų. Per metus to automobilio vertė sumažėja 15 %, palyginti su jo verte tų metų pradžioje. Kokia to automobilio vertė:
1) buvo praėjus 1 metams po automobilio įsigijimo?
2) buvo praėjus 2 metams po automobilio įsigijimo?
3) yra šiandien?
4) Iš kokio skaičiaus padauginus pradinę automobilio kainą, gaunama šios dienos automobilio vertė? Atsakymą parašykite laipsniu, o tada nurodykite to laipsnio apytikslę reikšmę šimtųjų tikslumu.
5) Kokį skaičių procentų šiandien automobilio vertė yra mažesnė, palyginti su pradine? Atsakymą parašykite procento tikslumu.

24. Paveikslas iš pradžių kainavo 350 Lt. Jo kaina buvo mažinama du kartus tuo pačiu procentų skaičiumi. Dabar paveikslas kainuoja 283 Lt 50 ct. Keliais procentais buvo mažinama paveikslo kaina kiekvieną kartą?

25. Kaimelio gyventojų skaičius dvejus metus iš eilės didėjo po 25 % kasmet. Dabar kaimelyje gyvena 600 žmonių. Kiek žmonių gyveno kaimelyje prieš 2 metus?

26. Ona nubraižė kvadratą. Ilona nubraižė kvadratą, kurio kraštinė 50 % trumpesnė už Onos kvadrato kraštinę. Tadas nubraižė trečią kvadratą, kurio kraštinė 50 % trumpesnė už Ilonos kvadrato kraštinę. Galiausiai Simas nubraižė kvadratą, kurio kraštinė 50 % trumpesnė už Tado kvadrato kraštinę. Tado kvadrato perimetras lygus 80 cm.
1) Kokio ilgio yra Simo kvadrato kraštinė?
2) Koks yra Ilonos kvadrato plotas?
3) Koks yra Onos kvadrato perimetras?

27. Į banką padėta 12 000 Lt dvejiems metams. Banko metinių palūkanų norma lygi 6 %. Kiek palūkanų sumokės bankas, jei antrųjų metų palūkanos bus skaičiuojamos nuo bendros padėtos į banką ir priaugusių palūkanų sumos?



APIBENDRINAME

Procentai ir kartai

1 % skaičiaus A galima rasti taip:

$A \cdot \frac{1}{100} = A \cdot 0{,}01.$

p % skaičiaus A galima rasti taip:

$A \cdot \frac{p}{100} = A \cdot 0{,}01 \cdot p.$

Jei skaičius B yra p % *didesnis* už skaičių A, tai

$B = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$

Jei skaičius B yra p % *mažesnis* už skaičių A, tai

$B = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right).$

Jei $A > B$, tai:

- A už B yra didesnis
  $\frac{A-B}{B} \cdot 100\,\%$;
- B už A yra mažesnis
  $\frac{A-B}{A} \cdot 100\,\%$.

Jei skaičius A yra n kartų didesnis už skaičių B, t. y.

$A = B \cdot n \quad (n > 1),$

tai A už B yra didesnis

$(n - 1) \cdot 100\,\%$.

Jei skaičius A yra n kartų mažesnis už skaičių B, t. y.

$A = B : n = B \cdot \frac{1}{n} \quad (n > 1),$

tai A už B yra mažesnis

$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 100\,\%$.

1 % skaičiaus 50 yra

$50 \cdot \frac{1}{100} = 50 \cdot 0{,}01 = 0{,}5.$

24 % skaičiaus 50 yra

$50 \cdot \frac{24}{100} = 50 \cdot 0{,}24 = 12.$

Skaičius, 24 % didesnis už skaičių 50, yra

$50 \cdot \left(1 + \frac{24}{100}\right) = 50 \cdot 1{,}24 = 62.$

Skaičius, 24 % mažesnis už skaičių 50, yra

$50 \cdot \left(1 - \frac{24}{100}\right) = 50 \cdot 0{,}76 = 38.$

10 už 8 yra didesnis

$\frac{10-8}{8} \cdot 100\,\% = 25\,\%.$

8 už 10 yra mažesnis

$\frac{10-8}{10} \cdot 100\,\% = 20\,\%.$

10 už 2 yra didesnis 5 kartus, t. y.

$10 = 2 \cdot 5.$

Vadinasi, 10 už 2 yra didesnis

$(5 - 1) \cdot 100\,\% = 400\,\%.$

2 už 10 yra mažesnis 5 kartus, t. y.

$2 = 10 : 5 = 10 \cdot \frac{1}{5}.$

Vadinasi, 2 už 10 yra mažesnis

$\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot 100\,\% = 80\,\%.$

Palūkanos

Palū́kanos — pinigų suma, kurią moka bankas už jam paskolintus pinigus.
Mẽtinių palū́kanų nòrma — procentais nurodytas palūkanų, kurias sumoka bankas per 1 metus, dydis.
Pàprastosios palū́kanos — tai palūkanos, kurios skaičiuojamos daugiau kaip 1 kartą, bet kiekvieną kartą tik nuo indėlio sumos.
Sudėtìnės palū́kanos — tai palūkanos, kurios skaičiuojamos daugiau kaip 1 kartą, bet kiekvieną kartą (pradedant antruoju) ne tik nuo indėlio sumos, bet ir nuo jau anksčiau priskaičiuotų palūkanų sumos, t. y. nuo priaugusio indėlio.

Paprastųjų procentų formulė

Jei dydis A *padidėja* n kartų po p procentų (kiekvieną kartą procentus skaičiuojant nuo *pradinės* dydžio A reikšmės), tai po n kartų dydžio A reikšmė bus lygi

$A_n = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot n\right).$

Jei dydis A *sumažėja* n kartų po p procentų (kiekvieną kartą procentus skaičiuojant nuo *pradinės* dydžio A reikšmės), tai po n kartų dydžio A reikšmė bus lygi

$A_n = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \cdot n\right).$

Sudėtinių procentų formulė

Jei dydis A *padidėja* n kartų po p procentų (kiekvieną kartą procentus skaičiuojant nuo *padidėjusios* dydžio A reikšmės), tai po n kartų dydžio A reikšmė bus lygi

$A_n = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$

Jei dydis A *sumažėja* n kartų po p procentų (kiekvieną kartą procentus skaičiuojant nuo *sumažėjusios* dydžio A reikšmės), tai po n kartų dydžio A reikšmė bus lygi

$A_n = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$

Skaičių 50 padidinę 3 kartus skaičiumi, kuris sudaro 10 % skaičiaus 50, gauname

$50 \cdot \left(1 + \frac{10}{100} \cdot 3\right) = 50 \cdot 1{,}3 = 65.$

Skaičių 50 sumažinę 3 kartus skaičiumi, kuris sudaro 10 % skaičiaus 50, gauname

$50 \cdot \left(1 - \frac{10}{100} \cdot 3\right) = 50 \cdot 0{,}7 = 35.$

Skaičių 50 padidinę 3 kartus po 10 %, kiekvieną kartą tuos procentus skaičiuodami nuo padidėjusio skaičiaus, gauname

$50 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = 50 \cdot 1{,}1^3 =$
$= 50 \cdot 1{,}331 = 66{,}55.$

Skaičių 50 sumažinę 3 kartus po 10 %, kiekvieną kartą tuos procentus skaičiuodami nuo sumažėjusio skaičiaus, gauname

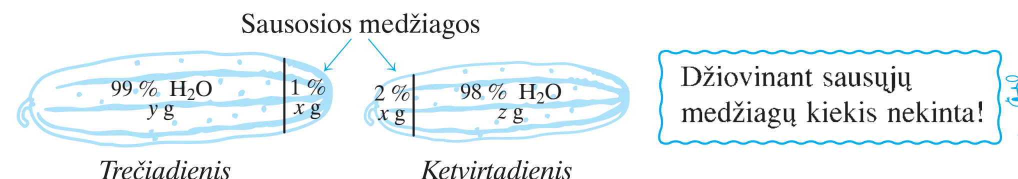
$50 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^3 = 50 \cdot 0{,}9^3 =$
$= 50 \cdot 0{,}729 = 36{,}45.$

Kiek svėrė agurkas ketvirtadienį?

Prisiminkime 10 puslapyje esančios 2 užduoties 1) punktą.

Trečiadienį agurkas svėrė 200 gramų. Jame buvo 99 % vandens. Kiek tas agurkas svėrė ketvirtadienį, jei jame buvo 98 % vandens?

1 klausimas. Kiek gramų svėrė trečiadienio agurke buvęs vanduo ir kiek gramų svėrė agurko sausosios medžiagos?



2 klausimas. Kiek gramų sausųjų medžiagų agurke buvo ketvirtadienį?
3 klausimas. Kiek svėrė agurkas ketvirtadienį?

SPRENDŽIAME

28. Raskite p procentų skaičiaus A, kai:
a) $A = 10$, $p = 10\,\%$; $p = 50\,\%$; $p = 150\,\%$; $p = 110\,\%$; $p = 210\,\%$;
b) $A = 101$, $p = 1\,\%$; $p = 13\,\%$; $p = 101\,\%$; $p = 113\,\%$; $p = 513\,\%$.

Raskime 250 % skaičiaus 10.
I būdas. 1 % skaičiaus 10 yra $10 : 100 = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.
250 % skaičiaus 10 yra $\frac{1}{10} \cdot 250 = 25$.
II būdas.
$\begin{matrix} 10 - 100\,\%, \\ x - 250\,\%; \end{matrix} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{100}{250}, \Rightarrow x = \frac{250 \cdot 10}{100}, \Rightarrow x = 25.$
III būdas.
$10 \cdot \frac{250}{100} = 10 \cdot 2{,}5 = 25.$

29. Raskite skaičių, kuris yra p procentų didesnis už skaičių A, kai:
a) $A = 10$, $p = 10\,\%$; $p = 50\,\%$; $p = 100\,\%$; $p = 110\,\%$; $p = 150\,\%$;
b) $A = 1001$, $p = 1\,\%$; $p = 17\,\%$; $p = 100\,\%$; $p = 200\,\%$; $p = 350\,\%$.

Raskime skaičių, kuris yra 250 % didesnis už skaičių 10.
I būdas. 250 % skaičiaus 10 yra $10 \cdot \frac{250}{100} = 25$.
Ieškomas skaičius yra $10 + 25 = 35$.
II būdas.
$\begin{matrix} 10 - 100\,\%, \\ x - 350\,\%; \end{matrix} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{100}{350}, \Rightarrow x = \frac{350 \cdot 10}{100}, \Rightarrow x = 35.$
III būdas.
$10 \cdot \left(1 + \frac{250}{100}\right) = 10 \cdot (1 + 2{,}5) = 10 \cdot 3{,}5 = 35.$

30. Raskite skaičių, kuris yra p procentų mažesnis už skaičių A, kai:
a) $A = 10$, $p = 10\,\%$; $p = 50\,\%$; $p = 63\,\%$; $p = 90\,\%$;
b) $A = 270$, $p = 1\,\%$; $p = 22\,\%$; $p = 99\,\%$.

Raskime skaičių, kuris yra 20 % mažesnis už skaičių 10.
I būdas. 20 % skaičiaus 10 yra $10 \cdot \frac{20}{100} = 2$.
Ieškomas skaičius yra $10 - 2 = 8$.
II būdas.
$\begin{matrix} 10 - 100\,\%, \\ x - 80\,\%; \end{matrix} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{100}{80}, \Rightarrow x = \frac{80 \cdot 10}{100}, \Rightarrow x = 8.$
III būdas.
$10 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 10 \cdot (1 - 0{,}2) = 10 \cdot 0{,}8 = 8.$

31. Rokas nori nusipirkti muzikinį centrą „Garsas“. Jis renkasi, kurioje iš dviejų parduotuvių tą centrą pirkti.

PARDUOTUVĖ „MUZIKA“

Tik „Garsas“ išsimokėtinai!
Pradinis įnašas — 900 Lt
Mėnesio įmoka — 150 Lt
Iš viso — 12 mėnesinių įmokų!

Parduotuvė „NATA“

„Garsas“
Sena kaina — 3000 Lt
Nauja kaina — 12 % mažesnė!

Kurioje parduotuvėje muzikinį centrą „Garsas“ pirkti yra pigiau? kiek procentų pigiau? kokį skaičių kartų pigiau?

32. a) Keliais procentais skaičius 2200 yra didesnis už skaičių 1650?
b) Keliais procentais skaičius 1650 yra mažesnis už skaičių 2200?

33. Kėdė kainuoja 125 Lt, o stalas — 175 Lt.
a) Keliais procentais stalas yra brangesnis už kėdę? Iš kokio skaičiaus padauginus kėdės kainą, gaunama stalo kaina?
b) Keliais procentais kėdė yra pigesnė už stalą? Iš kokio skaičiaus padauginus stalo kainą, gaunama kėdės kaina?

34. Cukraus kilogramo kaina sumažėjo 20 %. Kiek procentų daugiau cukraus galima nupirkti už tuos pačius pinigus?

35. Parduotuvė per 3 dienas pardavė 120 kg miltų. Pirmą dieną buvo parduota 25 % miltų, antrąją — 20 % daugiau negu pirmąją.
1) Kiek kilogramų miltų parduotuvė pardavė trečią dieną?
2) Kiek procentų miltų parduotuvė pardavė trečią dieną?
3) Kurią dalį miltų parduotuvė pardavė antrą dieną? Atsakymą parašykite paprastąja trupmena.

36. Muilas sveria 55 % daugiau negu taukai, reikalingi tam muilui pagaminti. Kiek kilogramų taukų reikia, norint pagaminti 31 kg muilo?

37. Giedrė pirko dviratį „Aras“ parduotuvėje „Greitis“, o Justas tokį patį dviratį pirko parduotuvėje „Kelias“.

„GREITIS“

„ARAS“
Sena kaina — 850 Lt
Nauja kaina — 136 Lt MAŽESNĖ

„KELIAS“

„ARAS“
Sena kaina — 880 Lt
Nauja kaina — 19 % MAŽESNĖ

1) Kiek procentų atpigo dviratis parduotuvėje „Greitis“?
2) Kiek litų atpigo dviratis parduotuvėje „Kelias“?
3) Kiek litų sumokėjo Giedrė ir kiek — Justas, pirkdami dviračius?

38. Knygos kaina sumažinta tiek procentų, kiek litų ji kainavo prieš kainos sumažinimą. Keliais procentais sumažinta knygos kaina, jei dabar ji kainuoja 16 Lt?

39. Sviestas gaunamas iš pieno. Pirmiausia iš pieno gaunama grietinėlė, kuri sudaro 21 % pieno masės. Tada iš grietinėlės gaunamas sviestas, kuris sudaro 23 % grietinėlės masės. Kiek reikės pieno, norint iš jo pagaminti 483 kg sviesto?

40. Batai, paltas ir kostiumas kartu kainuoja 1900 litų. Paltas 20 % brangesnis už batus, bet 25 % pigesnis už kostiumą. Kiek kainuoja batai, paltas ir kostiumas atskirai?

41. a) Prekės kaina buvo didinama tris kartus, atitinkamai 10 %, 20 % ir 25 %. Keliais procentais pabrango prekė?
b) Prekės kaina buvo mažinama tris kartus, atitinkamai 10 %, 20 % ir 25 %. Keliais procentais atpigo prekė?
c) Prekės kaina iš pradžių buvo padidinta 20 %, o tada — sumažinta 17 %. Atpigo ar pabrango prekė ir keliais procentais pakito prekės kaina?

42. Telefono kaina yra 800 Lt. Perkant jį išsimokėtinai, reikia sumokėti 320 Lt pradinį įnašą ir 12 mėnesių reikia mokėti mėnesio įmokas, kurios sudaro 6 % telefono kainos. Keliais procentais pabrangsta telefonas, perkamas išsimokėtinai?

43. Dviratis kainuoja 850 eurų. Perkant jį išsimokėtinai, kaina padidėja 20 %. Pradinis įnašas lygus 300 eurų. Koks yra mėnesio įmokos dydis, jei mokama:
a) 6 mėnesius? b) 12 mėnesių? c) 1,5 metų?

44. Spinta kainuoja 1400 Lt. Perkant ją išsimokėtinai, reikia iš karto sumokėti 25 % kainos ir per metus kas mėnesį mokėti po: a) 100 Lt; b) 105 Lt; c) 95 Lt.
Apskaičiuokite:
1) išsimokėtinai perkamos spintos kainą;
2) keliais procentais pabrangsta spinta, perkama išsimokėtinai (atsakymą parašykite vieneto tikslumu).

45. Muzikinis centras kainuoja 900 $. Kai jis perkamas išsimokėtinai, kaina padidėja $16\frac{2}{3}$ %. Pradinis įnašas lygus 300 $. Per kiek laiko bus sumokėta už centrą, jei kas mėnesį reikia mokėti po: a) 50 $? b) 75 $?
Atsakymą parašykite metais.

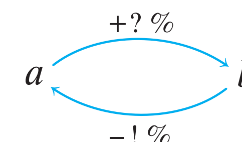
46. Į banką padėta 12 000 Lt. Kokia pinigų suma bus banke po metų; po dvejų metų; po trejų metų; po n metų, jei banko metinių palūkanų norma lygi 7 %, o mokamos palūkanos yra: a) paprastosios? b) sudėtinės?

47. Į banką padėta 4000 Lt. Kokia yra banko metinių:
a) paprastųjų palūkanų norma, jei per 2 metus indėlis išauga iki 4640 Lt?
b) sudėtinių palūkanų norma, jei per 2 metus indėlis išauga iki 4410 Lt? iki 4665,6 Lt? iki 4368 Lt 10 ct?

48. Keleriems metams į banką buvo padėta 8000 litų, jei:
a) buvo skaičiuojamos 5 % paprastosios metinės palūkanos, o indėlis išauga iki 9600 Lt?
b) buvo skaičiuojamos 4 % sudėtinės metinės palūkanos, o indėlis išauga iki 8652 Lt 80 ct?

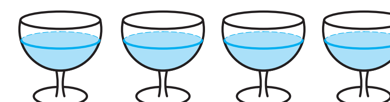
49. 1) Prekė, kainavusi 1,6 Lt, pabrango 25 %. Kiek procentų reikia atpiginti prekę, kad ji vėl kainuotų 1,6 Lt?
2) Prekė, kainavusi a Lt, pabrango 25 %. Kiek procentų reikia atpiginti prekę, kad ji vėl kainuotų a Lt?
3) Prekė, kainavusi a Lt, pabrango b %. Kiek procentų reikia atpiginti prekę, kad ji vėl kainuotų a Lt?

50. 1) Prekė, kainavusi 2 Lt, atpigo 20 %. Kiek procentų reikia pabranginti prekę, kad ji vėl kainuotų 2 Lt?
2) Prekė, kainavusi a Lt, atpigo 20 %. Kiek procentų reikia pabranginti prekę, kad ji vėl kainuotų a Lt?
3) Prekė, kainavusi a Lt, atpigo b %. Kiek procentų reikia pabranginti prekę, kad ji vėl kainuotų a Lt?





51. Graži pasaka.
Geroji mergaitė Ernesta su šauniuoju berniuku Valdestu šventė savo gimtadienius. Berniukas padovanojo mergaitei gėlių ir vieną norą, kurį pats sugalvojo: „Sveikinu Tave ir linkiu, kad išsipildytų mano noras, kurį aš sugalvojau Tau...!“ Mergaitė neliko skolinga — ji taip pat sugalvojo norą ir padovanojo jį berniukui. Visą šią gražią šventę stebėjo Norų angelas. Jis nusileido iš dangaus ir tarė: „Jūsų padovanoti gražūs norai išsipildys, jei išgersite po dvi iki pusės pripildytas taureles stebuklingų gėrimų“.

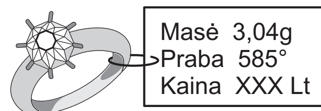


Dviejose taurelėse yra vienos rūšies, o kitose dviejose – kitos rūšies stebuklingo gėrimo.

„Bet atminkite, — tarė Angelas, — Jūs abu turite išgerti po vieną kiekvienos rūšies gėrimo taurelę. Tik tada Jūsų norai išsipildys!“
Tai pasakęs Angelas pakilo. Bėda ta, kad jis pamiršo pasakyti, kuriose taurelėse koks gėrimas yra...
1) Kokia tikimybė, kad jaunuoliai atspės, kuriose taurelėse kurios rūšies gėrimas yra?
2) Laimei, berniukas ir mergaitė sugalvojo, kaip galima išspręsti šį uždavinį nespėliojant! Pabandykite ir Jūs...

PRABA

Agnė parduotuvėje apžiūrinėjo auksinį žiedelį. Ją sudomino etiketėje užrašytas skaičius: 585°.



Ką žymi šis ženkliukas? Žinoma — tai ne laipsniai...

Santykinį tauriojo metalo kiekį lydinyje sutarta nurodyti skaičiumi, kuris parodo, kiek tūkstantųjų dalių grynojo tauriojo metalo yra lydinyje.

Jei lydinyje yra $\frac{1}{1000}$ dalis tauriojo metalo, tai sakoma, kad lydinio ***prabà*** yra 1. Praba žymima ženkleliu ° — tokiu pat, kaip ir laipsniai.

Prabuojami lydiniai, kuriuose yra *aukso*, *sidabro* arba *platìnos*.
Aukso lydinių prabos dažniausiai būna: 375°, 585°, 750°.
Sidabro lydinių prabos dažniausiai būna: 800°, 875°, 916°, 925°.
Platinos lydinių praba dažniausiai yra 950°.

Skaičius 585° reiškia, kad 1 grame auksinio žiedelio yra $\frac{585}{1000}$ gramų gryno aukso, o to žiedelio grynasis auksas sveria $3{,}04 \cdot \frac{585}{1000} \approx 1{,}78$ (g).

52. Sidabrinės grandinėlės masė yra 6 gramai. Kiek gramų gryno sidabro yra grandinėlėje, jei jos praba lygi 916°? 875°? 925°?

53. Auksinė grandinėlė sveria 25 gramus, o joje yra 18,75 gramo gryno aukso. Kokia yra grandinėlės praba?

54. Kiek sveria 916 prabos sidabrinė segė, jei gryno sidabro joje yra 22,9 g?

55. Auksinio lydinio masė yra 40 g. Gryno aukso ir priedų santykis lygus 9 : 1.
a) Kokia yra lydinio praba?
b) Kiek gramų gryno aukso yra lydinyje?

56. Juvelyras sulydė 1 gramą aukso, kurio praba yra 375°, 2 gramus sidabro, kurio praba yra 800°, ir 3 gramus platinos.
1) Kiek lydinyje yra miligramų gryno aukso? sidabro? platinos?

Miligramas — tūkstantoji gramo dalis.
1 mg = 0,001 g; 1 g = 1000 mg.

2) Kokia yra lydinio sidabro praba? aukso praba? platinos praba?
3) Kokia yra lydinio tauriųjų metalų bendroji praba?

PROMILĖS

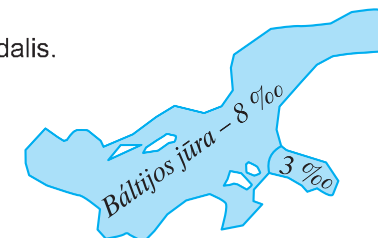
Mantė yra atostogavusi prie Juodosios, Raudonosios, Negyvosios ir Báltijos jūrų. Jai pasirodė, kad Báltijos jūros vanduo yra pats nesūriausias, o sūriausias yra Negyvosios jūros vanduo.

O gal jūrų druskingumą galima palyginti *skaičiais*?

Vandens druskingumas nurodomas skaičiumi, kuris parodo, kiek gramų ištirpusių druskų yra tirpale, kuris sveria 1000 g (= 1 kg). Pavyzdžiui, Báltijos jūros vandens kilograme vidutiniškai yra 8 gramai ištirpusių druskų. Išgarinę 1 toną Báltijos jūros vandens, gautume 8 kilogramus druskos.

Sakoma: Báltijos jūros vandens vidutinis druskingumas lygus 8 *pròmilėms*.
Rašoma: 8 ‰.
Suprantama: Viena promilė yra $\frac{1}{1000}$ dalis.

O kaip suprasti: *vidutinis druskingumas*? Įvairiose Báltijos jūros vietose jos vandens druskingumas yra nevienodas!



Druskingumas nurodomas *promilėmis* — tūkstantosiomis dalimis.

57. a) Išreikškite procentais: 3 ‰; 27 ‰; 0,5 ‰; 200 ‰.
b) Išreikškite promilėmis: 40 %; 9 %; 0,8 %; 1,43 %.

58. Kiek kilogramų druskos yra 1 tonoje:
a) Juodosios jūros vandens? b) Raudonosios jūros vandens?

Vidutiniai jūrų druskingumai: Báltijos — 8 ‰, Juodoji — 20 ‰, Raudonoji — 40 ‰, Negyvoji — 250 ‰.

59. Į stiklinę, kurioje yra 150 g vandens, įberiama 2 g druskos. Kokia yra druskos koncentracija tirpale? Atsakymą parašykite promilėmis.

60. Jūros vandens druskingumas lygus 15 ‰. Kiek gėlo vandens reikia įpilti į 30 kg jūros vandens, kad gauto vandens druskingumas būtų 10 ‰?

61. Koks vandens druskingumas, jei tas vanduo gautas sumaišius po 1 kg Báltijos, Juodosios, Raudonosios ir Negyvosios jūrų vandens?

TESTAS

62. Paltas kainavo 350 Lt. Jo kainą sumažino 20 %. Dabar paltas kainuoja:
A 320 Lt **B** 300 Lt **C** 330 Lt **D** 280 Lt

63. Slidės kainavo 300 Lt. Jų kainą padidino 15 %. Dabar slidės kainuoja:
A 315 Lt **B** 325 Lt **C** 335 Lt **D** 345 Lt

64. Baldų komplektas kainavo 2000 Lt. Jo kainą sumažino 200 Lt. Kiek procentų buvo sumažinta baldų komplekto kaina?
A 1 % **B** 10 % **C** 20 % **D** 18 %

65. Klasėje yra 10 mergaičių, o tai sudaro 50 % visų klasės mokinių. Kiek klasėje yra mokinių?
A 20 **B** 25 **C** 30 **D** 35

66. Stovykloje yra 110 berniukų, o tai sudaro 55 % visų stovyklautojų. Kiek yra stovyklautojų?
A 165 **B** 605 **C** 200 **D** 220

67. Kam lygus skaičius x, jei jis yra 30 % didesnis už skaičių 60?
A 78 **B** 90 **C** 80 **D** 68

68. Džiovinami obuoliai netenka 84 % svorio. Kiek nedžiovintų obuolių reikia paimti, norint gauti 16 kg džiovintų obuolių?
A 80 kg **B** 90 kg **C** 100 kg **D** 110 kg

69. Miltų masė sudaro 75 % iškeptos duonos masės. Kiek kilogramų duonos galima iškepti iš 330 kg miltų?
A 245 kg **B** 255 kg **C** 440 kg **D** 405 kg

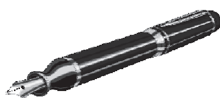
70. Prekė kainavo 200 Lt. Iš pradžių ji pabrango 25 %, o tada atpigo 20 %. Kiek prekė kainuoja dabar?
A 225 Lt **B** 205 Lt **C** 200 Lt **D** 190 Lt

71. Prekė kainavo 300 Lt. Iš pradžių ji atpigo 40 %, o tada pabrango 10 %. Kiek prekė kainuoja dabar?
A 148 Lt **B** 270 Lt **C** 250 Lt **D** 198 Lt

72. Naudodamiesi reklaminių lapelių duomenims, nustatykite, kurioje parduotuvėje — „Knyga“ ar „Mokykla“ — pigiau galima nupirkti 4 rašiklius „Plunksna“.

„KNYGA“

Kaina — 2 Lt
Pirk daugiau kaip 3 rašiklius ir mokėk 10 % pigiau!

„Mokykla“

Kaina — 2,4 Lt
Pirk 4 rašiklius, o mokėk už 3!

A „Knyga“ **B** „Mokykla“ **C** Abiejose parduotuvėse kainuos vienodai

73. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 5 cm.
a) Kvadrato kraštinę padidinus 20 %, jo perimetras padidės:
A 1 cm **B** 24 cm **C** 36 cm **D** 4 cm
b) Kvadrato kraštinę padidinus 20 %, jo plotas padidės:
A 4 cm^2 **B** 10 cm^2 **C** 11 cm^2 **D** 36 cm^2

74. Teigiamas skaičius B yra 50 % didesnis už skaičių A. Skaičius B lygus:
A $2 \cdot A$ **B** $1{,}5 \cdot A$ **C** $1{,}2 \cdot A$ **D** $0{,}5 \cdot A$

75. Teigiamas skaičius B lygus $2{,}5 \cdot A$. Keliais procentais skaičius B yra didesnis už skaičių A?
A 350 % **B** 150 % **C** 50 % **D** 250 %

76. Kiek procentų skaičiaus 30 sudaro skaičius 12?
A 60 % **B** 40 % **C** 140 % **D** 250 %

77. Kiek procentų skaičiaus 24 sudaro skaičius 60?
A 60 % **B** 40 % **C** 140 % **D** 250 %

78. Skaičius 18 sudaro 40 % skaičiaus a. 20 % skaičiaus $2a$ yra lygu:
A 18 **B** 9 **C** 36 **D** 45

79. Į banką padėta 4000 Lt. Kiek palūkanų bus gauta po metų, jei banko metinių palūkanų norma lygi 8 %?
A 3200 Lt **B** 4320 Lt **C** 320 Lt **D** 32 Lt

80. Bankas moka 6 % metinių palūkanų. Kiek pinigų gaus indėlininkas po metų, jei į banką padės 2000 Lt?
A 3200 Lt **B** 2240 Lt **C** 2120 Lt **D** 2012 Lt

81. Kiek pinigų reikia padėti į banką, norint per metus gauti 300 Lt palūkanų, jei banko metinių palūkanų norma lygi 6 %?
A 318 Lt **B** 1800 Lt **C** 5300 Lt **D** 5000 Lt

82. Į banką padėta 1500 Lt. Per metus tas indėlis išaugo iki 1575 Lt. Kokia yra banko metinių palūkanų norma?
A 2 % **B** 7,5 % **C** 5 % **D** 4,7 %

83. Į banką padėta 1000 Lt. Bankas moka 5 % metinių sudėtinių palūkanų. Kiek palūkanų sumokės bankas per 2 metus?
A 102,5 Lt **B** 100 Lt **C** 40 Lt **D** 250 Lt

84. Kampas A sudaro 50 % kampo B. Kampas C sudaro 150 % kampo A. Rašant kampus nuo mažiausio iki didžiausio, jų tvarka yra:
A A, B, C **B** A, C, B **C** B, A, C
D B, C, A **E** C, A, B **F** C, B, A

PASITIKRINAME

85. Spausdintuvas, kuris kainavo 400 Lt, buvo atpigintas 80 Lt.
1) Kokia yra naujoji spausdintuvo kaina?
2) Keliais procentais atpigo spausdintuvas?
3) Keliais procentais reikia padidinti naująją spausdintuvo kainą, kad gautume senąją jo kainą?

86. Stalinė lempa kainavo 120 Lt. Naujasis tos lempos modelis yra 30 Lt brangesnis.
1) Keliais procentais naujojo lempos modelio kaina yra didesnė už senojo modelio kainą?
2) Kiek procentų reikia sumažinti naujojo lempos modelio kainą, kad ji būtų 120 Lt?

87. Muzikinis centras kainavo 960 Lt. Jo kaina buvo sumažinta du kartus:
- pirmą kartą jis atpigo 20 %;
- antrą kartą jo kaina sumažėjo dar 37,5 %.

1) Kiek kainavo muzikinis centras, jo kainą sumažinus pirmąjį kartą?
2) Kiek litų buvo sumažinta kaina antrąjį kartą?
3) Kiek procentų galutinė centro kaina yra mažesnė už pradinę?
4) Iš kokio skaičiaus padauginus pradinę kainą, gaunama galutinė kaina?

88. Gitara, kainavusi 120 Lt, pirmą kartą pabrango 20 %, o antrą kartą — dar 30 %.
1) Kiek procentų pabrango gitara iš viso?
2) Kiek procentų reikia sumažinti galutinę gitaros kainą, kad gautume pradinę jos kainą? Atsakymą parašykite procento tikslumu.

89. a) Telefonas kainavo 450 Lt. Iš pradžių jo kainą padidino 10 %, o vėliau — sumažino 10 %. Kaip pasikeitė galutinė telefono kaina procentais, palyginti su pradine (padidėjo ar sumažėjo ir kiek)?
b) Spausdintuvas kainavo 300 Lt. Iš pradžių jo kainą sumažino 20 %, o vėliau — padidino 20 %. Kaip pasikeitė galutinė spausdintuvo kaina procentais, palyginti su pradine (padidėjo ar sumažėjo ir kiek)?

90. Lentelėje surašyta, kiek maždaug žmonių gyveno Žemėje tam tikru praėjusiu laikotarpiu ir kiek jų turėtų gyventi 2028 m.

Metai	8000 m. pr. Kr.	1000 m. pr. Kr.	1000	1600	1720	1802
Gyveno žmonių	5 mln.	50 mln.	310 mln.	500 mln.	750 mln.	1 mlrd.

Metai	1928	1961	1974	1987	1999	2028
Gyveno žmonių	2 mlrd.	3 mlrd.	4 mlrd.	5 mlrd.	6 mlrd.	8 mlrd.

Kiek kartų ir kiek procentų padidėjo gyventojų skaičius:
a) nuo 1802 m. iki 1961 m.?
b) nuo 1928 m. iki 2028 m.?
c) nuo 1000 m. pr. Kr. iki 1999 m.?

91. Jei automobilio savininkas keičia vieną automobilio amortizatorių dirbtuvėse „Amor“, tai jam kainuoja 120 litų. Tose dirbtuvėse kabo skelbimas:

Keičiant 2 amortizatorius, nuolaida 15 %!	Keičiant visus 4 amortizatorius, nuolaida 20 %!

a) Kiek kainuos vieno amortizatoriaus pakeitimas, keičiant du amortizatorius?
b) Kiek reikės sumokėti už 4 amortizatorių pakeitimą?

92. Į banką padėta 10 500 Lt. Kokia pinigų suma bus banke po metų, jeigu banko metinių palūkanų norma lygi:
a) 8 %? b) 6,5 %? c) 7,25 %?

93. Kokia yra banko metinių palūkanų norma, jei indėlis per metus išauga:
a) nuo 4500 Lt iki 4770 Lt?
b) nuo 14 280 Lt iki 15 208,2 Lt?

94. Kiek pinigų reikia padėti į banką, kuris moka 6 % metinių palūkanų, kad po metų indėlio su palūkanomis suma būtų lygi:
a) 6360 Lt? b) 4187 Lt? c) 4033,3 Lt?

95. Į banką padėta 10 000 Lt. Kokia pinigų suma bus banke po trejų metų, jei bankas moka 5 %:
a) metinių paprastųjų palūkanų?
b) metinių sudėtinių palūkanų?

96. Skalbimo mašina kainuoja 900 Lt. Perkant ją išsimokėtinai, reikia sumokėti 120 Lt pradinį įnašą ir kas mėnesį visus metus mokėti po 80 Lt.
1) Kiek litų kainuoja skalbimo mašina, perkama išsimokėtinai?
2) Keliais procentais pabrangsta skalbimo mašina, perkama išsimokėtinai?
3) Kokį skaičių kartų pabrangsta skalbimo mašina, perkama išsimokėtinai?

97. Kompiuterį, kurio kaina yra 1600 Lt, galima įsigyti išsimokėtinai, sumokant 200 Lt pradinį įnašą ir kas mėnesį mokant vienodo dydžio įmokas. Apskaičiuokite mėnesio įnašo dydį, jei žinoma, kad išsimokėtinai perkamo kompiuterio kaina lygi 2000 Lt, o likusią sumą reikia sumokėti per:
a) 6 mėn; b) 1,5 metų; c) 3 metus.

98. Valties variklis, perkamas išsimokėtinai, pabrangsta 25 %. Pirkimo išsimokėtinai sąlygos yra tokios:
- Iš karto reikia sumokėti 200 Lt pradinį įnašą;
- 10 mėnesių mokėti po ☁ Lt.

Kas turėtų būti parašyta vietoj debesėlio, jei žinoma, kad visų 10-ties mėnesinių įmokų bendra suma 200 litų viršija variklio, perkamo *neišsimokėtinai*, kainą?

99. Suprastinkite trupmeną.

a) $\frac{15}{18}$; b) $\frac{120}{160}$; c) $\frac{49}{147}$; d) $\frac{144}{288}$; e) $\frac{450}{250}$;

f) $\frac{-72}{81}$; g) $\frac{48}{-16}$; h) $\frac{-1020}{-100}$; i) $\frac{169}{13}$; j) $\frac{-225}{15}$.

> Trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginus arba padalijus iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus, trupmenos reikšmė nepasikeičia:
> $\frac{a}{b}=\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$; $\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}$; čia $n \neq 0$.

100. Sudėkite (atimkite) trupmenas ir mišriuosius skaičius su vienodais vardikliais.

a) $\frac{3}{7}+\frac{11}{7}$; b) $\frac{3}{7}-\frac{11}{7}$; c) $\frac{8}{45}+\frac{3}{45}$; d) $-\frac{8}{45}-\frac{3}{45}$;

e) $1\frac{2}{15}+2\frac{3}{15}$; f) $1\frac{2}{15}-2\frac{3}{15}$; g) $5\frac{11}{81}+2\frac{2}{81}$; h) $-5\frac{11}{81}-2\frac{2}{81}$.

> $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$; $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$; $A\frac{a}{b}=\frac{A \cdot b+a}{b}$.

101. Sudėkite (atimkite) trupmenas ir mišriuosius skaičius su skirtingais vardikliais.

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{14}$; b) $\frac{2}{7}-\frac{3}{14}$; c) $-\frac{2}{7}-\frac{3}{14}$; d) $-\frac{2}{7}+\frac{3}{14}$;

e) $\frac{8}{15}+\frac{1}{3}$; f) $\frac{8}{15}-\frac{1}{3}$; g) $-\frac{8}{15}-\frac{1}{3}$; h) $-\frac{8}{15}+\frac{1}{3}$;

i) $2\frac{7}{8}+1\frac{1}{6}$; j) $2\frac{7}{8}-1\frac{1}{6}$; k) $-2\frac{7}{8}-1\frac{1}{6}$; l) $-2\frac{7}{8}+1\frac{1}{6}$;

m) $4\frac{2}{9}+1\frac{1}{11}$; n) $4\frac{2}{9}-1\frac{1}{11}$; o) $-4\frac{2}{9}-1\frac{1}{11}$; p) $-4\frac{2}{9}+1\frac{1}{11}$.

> Sudedant (atimant) trupmenas su skirtingais vardikliais, pirmiausia trupmenas reikia subendravardiklinti.

102. Sudauginkite (padalykite) trupmenas ir mišriuosius skaičius.

a) $\frac{11}{12}\cdot\frac{3}{44}$; b) $\frac{9}{17}\cdot 1\frac{7}{27}$; c) $-2\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{35}$; d) $-3\frac{1}{13}\cdot\left(-1\frac{11}{80}\right)$;

e) $\frac{3}{7}:\frac{9}{14}$; f) $\frac{4}{9}:\left(-1\frac{13}{27}\right)$; g) $-1\frac{3}{7}:\frac{30}{49}$; h) $-2\frac{2}{3}:\left(-1\frac{7}{9}\right)$.

> $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

103. Naudodamiesi formule $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, išskaidykite dauginamaisiais.

a) m^2-4; b) $16-y^2$; c) $\frac{1}{9}-a^2$; d) $x^2-\frac{25}{36}$; e) $4a^2-0{,}25$.

> Reiškinys a^2+b^2 dauginamaisiais neskaidomas!

104. Naudodamiesi formulėmis $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, dvinarį pakelkite kvadratu.

a) $(x+4)^2$; b) $(a-7)^2$; c) $(5y+9)^2$; d) $(3m-2k)^2$.

> $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$.

105. Naudodamiesi formulėmis $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, trinarį parašykite kaip dvinario kvadratą.

a) $m^2-8m+16$; b) $a^2-20a+100$; c) $\frac{1}{9}x^2+2x+9$; d) $4k^2-20k+25$.

> $100a^2-100a+25=(10a)^2-2\cdot 10a\cdot 5+5^2=(10a-5)^2$.

106. Dvinarį išskaidykite dauginamaisiais.

a) x^2-7x; b) $3y^2+y$; c) $-5y^2-10y$;

d) x^2-49; e) $100a^2-b^2$; f) $\frac{1}{36}-121y^2$.

> $-7m+m^2=m\cdot(-7+m)=m\cdot(m-7)$;
> $0{,}25a^2-\frac{1}{4}=(0{,}5a)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(0{,}5a-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(0{,}5a+\frac{1}{2}\right)$.

107. Kairiąją lygties pusę išskaidę dauginamaisiais, išspręskite nepilnąją kvadratinę lygtį.

a) $x^2-7x=0$; b) $3y^2+y=0$;

c) $16x^2-81=0$; d) $\frac{1}{36}-144y^2=0$;

e) $x^2-0{,}25=0$; f) $0{,}01-\frac{y^2}{4}=0$.

> $x^2-x=0$,
> $x(x-1)=0$,
> $\underline{x=0}$ arba $x-1=0$,
> $\underline{x=1}$.

108. Išspręskite pilnąją kvadratinę lygtį, naudodamiesi sprendinių formulėmis.

a) $x^2-4x-5=0$;

b) $x^2+6x+8=0$;

c) $2x^2+5x-3=0$;

d) $x^2-0{,}4x+0{,}03=0$;

e) $x^2-10x+25=0$;

f) $x^2-10x+26=0$.

> $ax^2+bx+c=0$.
> Jei $D=b^2-4ac>0$, tai:
> $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$,
> $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

2 skyrius

Kam lygi trupmena?

SUGALVOK SKAIČIŲ!
Sugalvotą skaičių pakelk kvadratu ir atimk vienetą.
Gautą rezultatą padalyk iš vienetu didesnio už sugalvotąjį skaičiaus.
JEI VISKĄ ATLIKAI TEISINGAI, TAI GAVAI SKAIČIŲ, KURIS YRA VIENETU MAŽESNIS UŽ SUGALVOTĄJĮ SKAIČIŲ!

Įsitikinkime šio teiginio teisingumu.

1 užduotis. Įsitikinkite, kad teiginys yra teisingas visiems natūraliesiems vienaženkliams skaičiams: 1, 2, 3, ..., 9.

$$?^2 - 1 \; : \; ? + 1 \; = \; ? - 1$$

Vienaženkliùs skaičiùs patikrinti nesunku — jų yra nedaug.
Bet visų skaičių juk nepatikrinsi — jų yra be galo daug...

2 užduotis. Įsitikinkite, kad teiginys yra teisingas jūsų sugalvotam skaičiui (ir nebūtinai natūraliajam, — juk sugalvoti galima ir kokį nors trupmeninį, ir kokį nors neigiamąjį ar net iracionalųjį skaičių).

O gal kam nors pavyko aptikti skaičių, su kuriuo teiginys yra ***neteisingas***?

3 užduotis. Sudarykite raĩdinį réiškinį:

1) Sugalvotą skaičių pažymėkite raide (pvz., x);
2) Užrašykite, kam lygus sugalvoto skaičiaus (x) kvadrato ir 1 skirtumas;
3) Užrašykite, kam lygi sugalvoto skaičiaus (x) ir 1 suma;
4) Trupmena užrašykite, kam lygus 2) ir 3) reiškinių dalmuo.

O gal galite įsitikinti, kad gautoji trupmena lygi $x - 1$?

O ar su visomis x reikšmėmis ta trupmena turi prasmę?

Trupmeniniai raidiniai reiškiniai

Šiame skyriuje nagrinėsime trupmenas, kurių skaitiklyje ir vardiklyje yra raĩdžių:

$$\frac{a^2 - 1}{a + 1}, \quad \frac{a - b}{a^2 - 2ab + b^2}, \quad \ldots .$$

- Mokysimės prastinti raĩdines trùpmenas.
- Mokysimės skaidyti dauginamaisiais kvadrãtinį trìnarį

  $ax^2 + bx + c.$

- Mokysimės raidines trupmenas sudėti, atimti, dauginti ir dalyti.

2.1. PRASTINAME TRUPMENAS SU VIENU KINTAMUOJU

Rašome: $\frac{x^2-1}{x^2+x}$.
Skaitome: Trupmena, kurios skaitiklis iks kvadratu minus vienas, o vardiklis iks kvadratu plius iks.



Užduotis. Nagrinėkime trupmeną

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x}.$$

1) Perskaitykite trupmeną.
2) Pasakykite trupmenos kintamąjį.
3) Nuo ko priklauso trupmenos reikšmė?
4) Ar su visomis x reikšmėmis trupmena turi prasmę?

Trupmena neturi prasmės, kai jos vardiklis lygus 0.

Užrašykite x reikšmes, su kuriomis trupmena neturi prasmės; turi prasmę.

5) Suprastinkite trupmeną:
- skaitiklį išskaidykite dauginamaisiais;
- vardiklį išskaidykite dauginamaisiais;
- nurodykite skaitiklio ir vardiklio tą patį dauginamąjį;
- skaitiklį ir vardiklį padalykite iš to dauginamojo.

$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$;
$a^2+ab=a\cdot(a+b)$.



Trupmeną $\frac{x^2-1}{x^2+x}$ galima suprastinti:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}=\frac{x-1}{x}.$$

$\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}$, kai $c\neq 0$.



Prastindami trupmeną:
1) jos skaitiklį ir vardiklį skaidome dauginamaisiais;
2) jei skaitiklis ir vardiklis turi vienodų dauginamųjų, tai jų neberašome.

109. Apskaičiuokite trupmeninio reiškinio reikšmę.

a) $\frac{x+4}{x}$, kai $x=1$; $x=4$; $x=-4$; b) $\frac{x-5}{2x}$, kai $x=1$; $x=-5$; $x=5$.

110. Su kuriomis kintamojo y reikšmėmis neturi prasmės trupmena:

a) $\frac{y}{y+7}$? b) $\frac{3y}{2y-6}$? c) $\frac{y+2}{y-2}$?
d) $\frac{y+2}{y^2+y}$? e) $\frac{y^2-1}{2y^2-3y}$? f) $\frac{2y}{y^2-4}$?

Trupmena $\frac{y}{y-10}$ neturi prasmės, kai $y-10=0$, t. y. kai $y=10$.

111. Nustatykite trupmenos skaitiklio ir vardiklio vienodus dauginamuosius, o tada trupmeną suprastinkite.

a) $\frac{4x}{x^2}$; b) $\frac{4x^2}{x}$; c) $\frac{15x^3}{20x^2}$;
d) $\frac{120y^4}{20y^2}$; e) $\frac{2y^3}{4y^4}$; f) $\frac{25y}{10y^3}$.

$$\frac{8x^6}{2x^3}=\frac{2x^3\cdot 4x^3}{2x^3\cdot 1}=\frac{4x^3}{1}=4x^3.$$

112. Trupmenos skaitiklį išskaidykite dauginamaisiais, o tada trupmeną suprastinkite.

a) $\frac{8x-4}{8x}$; b) $\frac{25-15x}{5x^2}$; c) $\frac{9x^2-6x}{3x^3}$;
d) $\frac{2y-y^2}{4y^2}$; e) $\frac{y^2-9}{y+3}$; f) $\frac{4y^2-1}{1+2y}$.

$$\frac{14x^2+2x}{14x^3}=\frac{2x\cdot(7x+1)}{2x\cdot 7x^2}=\frac{7x+1}{7x^2}.$$

113. Trupmenos vardiklį išskaidykite dauginamaisiais, o tada trupmeną suprastinkite.

a) $\frac{10y}{5y+15}$; b) $\frac{12y}{2y-6}$; c) $\frac{9y^2}{12y-3y^2}$;
d) $\frac{25x}{10x^2-15x}$; e) $\frac{x^3}{x^3-x}$; f) $\frac{4x-6}{9-4x^2}$.

$$\frac{3y}{15y^2-3y}=\frac{3y}{3y(5y-1)}=\frac{1}{5y-1}.$$

114. Suprastinkite trupmeną.

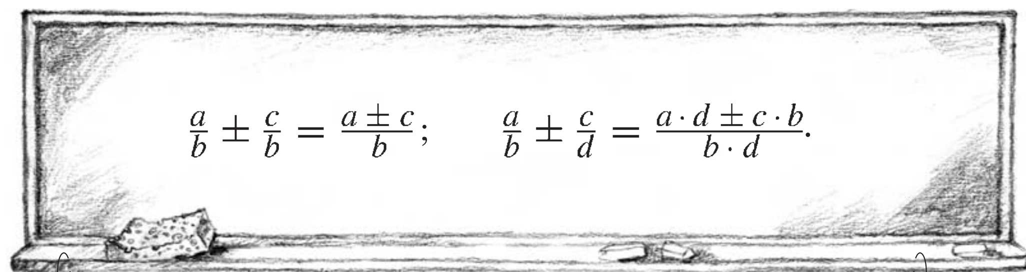
a) $\frac{5x-10}{6x-12}$; b) $\frac{3x^2-6x}{x^2-4}$; c) $\frac{y^2-100}{y^2+10y}$; d) $\frac{y^2-9}{5y^3-15y^2}$; e) $\frac{x^3-x}{x^3+x^2}$.

$$\frac{2x^2+8x}{x^2-16}=\frac{2x(x+4)}{x^2-4^2}=\frac{2x(x+4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{2x}{x-4}.$$

115. Tik vieną trupmenų **A** ir **B** galima suprastinti. Kurią? Suprastinkite tą trupmeną. Apskaičiuokite abiejų trupmenų reikšmes naudodamiesi nurodytomis trupmenų kintamojo reikšmėmis.

a) **A** $\frac{4y}{y^2}$ **B** $\frac{4+y}{y^2}$ $y=1$; $y=-3$.
b) **A** $\frac{36x^2}{x+6}$ **B** $\frac{x^2-36}{x+6}$ $x=0$; $x=2$.
c) **A** $\frac{a^2}{a+1}$ **B** $\frac{a^2-1}{a+1}$ $a=-2$; $a=-\frac{2}{3}$.
d) **A** $\frac{x-1}{1-x}$ **B** $\frac{x-1}{x+1}$ $x=0$; $x=-1\frac{1}{2}$.

2.2. SUDEDAME IR ATIMAME TRUPMENAS SU VIENU KINTAMUOJU



Trupmenos su kintamaisiais sudedamos ir atimamos taip, kaip ir skaitinės trupmenos.

1 užduotis. Sudėkite (atimkite) trupmenas su *vienodais vardikliais*.

a) $\frac{2}{x} + \frac{7}{x}$; b) $\frac{5}{y} - \frac{3}{y}$; c) $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+1}$; d) $\frac{2}{2y-1} - \frac{y}{2y-1}$; e) $\frac{x}{x^2+1} - \frac{1-x}{x^2+1}$.

Sudėdami (atimdami) trupmenas su vienodais vardikliais, sudedame (atimame) jų skaitiklius, o vardiklį paliekame tą patį:

$\frac{5}{x+1} + \frac{3}{x+1} = \frac{5+3}{x+1} = \frac{8}{x+1}$; $\frac{2y-1}{y-1} - \frac{y}{y-1} = \frac{2y-1-y}{y-1} = \frac{y-1}{y-1} = 1$.

2 užduotis. Sudėkite (atimkite) trupmenas su *skirtingais vardikliais*.

a) $\frac{2}{x} + \frac{7}{3x}$; b) $\frac{5}{2y} - \frac{3}{y}$; c) $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x-2}$; d) $\frac{2+y}{y^2} - \frac{1}{y}$; e) $\frac{1}{y} - \frac{2+y}{y^2}$.

Sudėdami (atimdami) trupmenas su skirtingais vardikliais, pirmiausia tas trupmenas subendravardikliname:

$\frac{5}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5(x-1)+3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5x-5+3x+3}{(x+1)(x-1)} =$

$= \frac{8x-2}{(x+1)(x-1)}$; Čia atskliausti nebūtina!

$\frac{3y+1}{y^2} - \frac{2}{y} = \frac{3y+1}{y^2} - \frac{2y}{y^2} = \frac{3y+1-2y}{y^2} = \frac{y+1}{y^2}$;

$\frac{x+2}{x^2-x} + \frac{3}{x} = \frac{x+2}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{x+2}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+2+3x-3}{x(x-1)} = \frac{4x-1}{x(x-1)}$.

f(x)/g(x)

116. Sudėkite (atimkite) trupmenas su vienodais vardikliais.

a) $\frac{9}{x} + \frac{7}{x}$; b) $\frac{4}{x-1} + \frac{x}{x-1}$; c) $\frac{y+1}{2y+3} + \frac{3y}{2y+3}$; d) $\frac{5y}{y+2} + \frac{6y-1}{y+2}$;

e) $\frac{9}{x} - \frac{7}{x}$; f) $\frac{4}{x-1} - \frac{x}{x-1}$; g) $\frac{y+1}{2y+3} - \frac{3y}{2y+3}$; h) $\frac{5y}{y+2} - \frac{6y-1}{y+2}$.

$\frac{2+y}{y-1} - \frac{3y-1}{y-1} = \frac{2+y-(3y-1)}{y-1} = \frac{2+y-3y+1}{y-1} = \frac{3-2y}{y-1}$.

Dėmesio — nepamirškite apskliausti!

117. Subendravardiklinkite trupmenas, o tada jas sudėkite (atimkite).

a) $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{x}$; b) $\frac{x+1}{2x} + \frac{x+2}{3x}$; c) $\frac{2}{y-3} + \frac{3}{y+3}$; d) $\frac{y-1}{y^2+y} + \frac{1}{y}$;

e) $\frac{2x+5}{x^2} - \frac{x+1}{x}$; f) $\frac{x-1}{5x} - \frac{2}{3x}$; g) $\frac{3}{y-5} - \frac{2-y}{y+5}$; h) $\frac{1}{2y} - \frac{y-1}{y^2-y}$.

118. Sumą (skirtumą) parašykite kaip trupmeną.

a) $1 + \frac{1}{x}$; b) $2 - \frac{1}{x}$; c) $\frac{3}{x} + x$; d) $\frac{4}{y} - 2y$; e) $\frac{7}{y} - 7$; f) $-\frac{5}{y} - 5y$.

$6 + \frac{1}{y} = \frac{6}{1} + \frac{1}{y} = \frac{6y}{y} + \frac{1}{y} = \frac{6y+1}{y}$;

$\frac{5}{x} - 2x = \frac{5}{x} - \frac{2x}{1} = \frac{5}{x} - \frac{2x \cdot x}{x} = \frac{5-2x^2}{x}$.

119. Įsitikinkite, kad reiškinio reikšmė nepriklauso nuo x reikšmės.

a) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}$; b) $\frac{32+x}{8-x} - \frac{5x}{8-x}$; c) $-\frac{10}{x-5} - \frac{2x}{5-x}$; d) $\frac{3x}{x-1} - \frac{3x}{x^2-x}$.

$\frac{27+x}{9-x} - \frac{4x}{9-x} = \frac{27+x-4x}{9-x} = \frac{27-3x}{9-x} = \frac{3(9-x)}{9-x} = \frac{3}{1} = 3$.

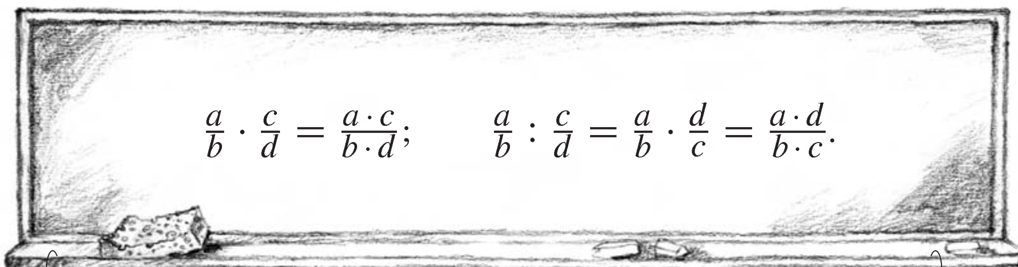
Vadinasi, su visomis galimomis x reikšmėmis reiškinio $\frac{27+x}{9-x} - \frac{4x}{9-x}$ reikšmė lygi 3.

120. Sudėkite (atimkite) trupmenas.

a) $\frac{2x}{x-2} + \frac{3}{x}$; b) $\frac{4}{m} - \frac{3}{m+4}$; c) $\frac{5}{y+1} + \frac{6}{y-2}$;

d) $\frac{7}{a-3} - \frac{8}{a+3}$; e) $\frac{3x}{x-1} + \frac{2}{x+2}$; f) $\frac{7y}{y+4} - \frac{y}{y-3}$.

2.3. DAUGINAME IR DALIJAME TRUPMENAS SU VIENU KINTAMUOJU



Trupmenos su kintamaisiais dauginamos ir dalijamos taip, kaip ir skaitinės trupmenos.

1 užduotis. Sudauginkite trupmenas.

a) $\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}$; b) $\frac{3}{y-1}\cdot\frac{y}{y+1}$; c) $\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{4}$; d) $\frac{3}{y-1}\cdot\frac{y-1}{y}$.

$\frac{5}{x}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{5\cdot 2}{x\cdot(x-1)}=\frac{10}{x(x-1)}$; Čia atskliausti nebūtina!

$\frac{5y^2}{y^2-1}\cdot\frac{y-1}{y}=\frac{5y^2\cdot(y-1)}{(y^2-1)\cdot y}=$ ← Atskliausti neverta!

$=\frac{5y\cdot y\cdot(y-1)}{(y-1)\cdot(y+1)\cdot y}=$ ← Verta skaidyti dauginamaisiais

$=\frac{5y}{y+1}$.

2 užduotis. Padalykite trupmenas.

a) $\frac{1}{x}:\frac{2}{x}$; b) $\frac{3}{y-1}:\frac{y}{y+1}$; c) $\frac{x^2}{x^2+1}:\frac{x}{x+1}$; d) $\frac{y^2}{y^2-1}:\frac{2y}{y-1}$.

Dalydami trupmenas, dalybą keičiame daugyba, o antrąją trupmeną (daliklį) apverčiame:

$\frac{5}{x}:\frac{2}{x-1}=\frac{5}{x}\cdot\frac{x-1}{2}=\frac{5\cdot(x-1)}{x\cdot 2}=\frac{5(x-1)}{2x}$;

$\frac{2y+2}{y^2}:\frac{y+1}{y}=\frac{2y+2}{y^2}\cdot\frac{y}{y+1}=\frac{2\cdot(y+1)}{y\cdot y}\cdot\frac{y}{y+1}=\frac{2}{y}$.

f(x)/g(x)

121. Sudauginkite trupmenas.

a) $\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x^2}$; b) $\frac{3x}{x+1}\cdot\frac{x}{x+1}$; c) $\frac{x+7}{3}\cdot\frac{x}{x-1}$; d) $\frac{7}{y-1}\cdot\frac{y+1}{y}$.

122. Padalykite trupmenas.

a) $\frac{7}{x-1}:\frac{x}{4}$; b) $\frac{x-5}{9}:\frac{x-2}{4}$; c) $\frac{x^2}{x+5}:\frac{x^2+1}{x}$; d) $\frac{y^2}{3y+1}:\frac{3(y+1)}{y}$.

123. Sudauginkite (padalykite) trupmenas ir, jei galima, rezultatą suprastinkite.

a) $\frac{x+3}{x^2}\cdot\frac{x}{x-3}$; b) $\frac{7y}{y+8}\cdot\frac{y}{14}$; c) $\frac{(a+1)^3}{4a^2}\cdot\frac{2a}{(a+1)^2}$;

d) $\frac{x+2}{8x}:\frac{x+3}{4x}$; e) $\frac{y^2}{2y-1}:\frac{2y}{2y+3}$; f) $\frac{(a-3)^3}{5a^2}:\frac{(a-3)^2}{10a}$;

g) $\frac{x^2-36}{x^2}\cdot\frac{2x}{x-6}$; h) $\frac{5y^2-y}{3y}\cdot\frac{9}{5y-1}$; i) $\frac{2a+1}{a-3}\cdot\frac{3a}{6a+3}$;

j) $\frac{x^2-4}{7x}:\frac{x+2}{14}$; k) $\frac{15y}{5y+10}:\frac{y}{y+2}$; l) $\frac{2a+16}{6a}:\frac{a^2-64}{3a-24}$.

124. Įsitikinkite, kad lygybė yra teisinga.

a) $\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}=1$; b) $\frac{(y+5)^2}{y}\cdot\frac{4}{2y+10}=\frac{2(y+5)}{y}$;

c) $\frac{(a+5)^2}{25a}:\frac{a+5}{5a}=\frac{a+5}{5}$; d) $\frac{m^2-9}{3m+9}:\frac{(m-3)^2}{9m}=\frac{3m}{m-3}$.

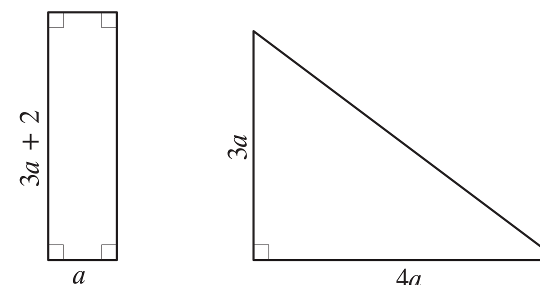
125. Pakelkite trupmeną laipsniu.

a) $\left(\frac{x}{2}\right)^3$; b) $\left(\frac{4}{a^2}\right)^4$; c) $\left(-\frac{x+1}{5}\right)^2$; d) $\left(-\frac{3y}{2y-1}\right)^3$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

$\left(-\frac{2x}{(x^2-2)^2}\right)^3=-\frac{(2x)^3}{(x^2-2)^6}=-\frac{8x^3}{(x^2-2)^6}$; $\left(-\frac{5y^2}{y-1}\right)^2=\frac{(5y^2)^2}{(y-1)^2}=\frac{25y^4}{(y-1)^2}$.

126. Pavaizduotas stačiakampis, kurio matmenys yra a cm × $(3a+2)$ cm, ir statusis trikampis, kurio statiniai lygūs $3a$ cm ir $4a$ cm.



1) Užrašykite, kam lygus stačiakampio: a) perimetras P_1; b) plotas S_1.
2) Užrašykite, kam lygus trikampio: a) perimetras P_2; b) plotas S_2.
3) Su kuria a reikšme: a) $P_1=P_2$? b) $S_1=S_2$?
4) Kam lygus santykis: a) $\frac{P_1}{P_2}$? b) $\frac{S_1}{S_2}$?

2.4. KVADRATINĮ TRINARĮ SKAIDOME DAUGINAMAISIAIS

Reiškinys

$ax^2 + bx + c$, čia a, b, c — nelygūs 0 skaičiai, x — kintamasis,

vadinamas *kvadrãtiniu trìnariu*.



1 užduotis. Raskite kvadratinio trinario $x^2 - 3x + 2$ šaknis.

Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ kintamojo x reikšmės, su kuriomis to trinario reikšmė lygi 0, vadinamos kvadratinio trinario ***šaknìmis***.

Ieškodami kvadratinio trinario šaknų, sprendžiame lygtį

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Pavyzdžiui, raskime kvadratinio trinario $2x^2 + 6x - 8$ šaknis.

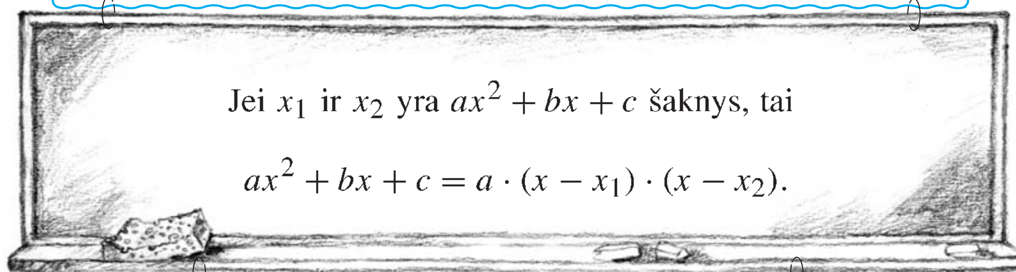
Sprendžiame lygtį: $2x^2 + 6x - 8 = 0$, $D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 100$;

$x_1 = \frac{-6+\sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-6+10}{4} = 1$, $x_2 = \frac{-6-10}{4} = -4$.

Vadinasi, $2x^2 + 6x - 8$ šaknys yra $x = 1$ ir $x = -4$.

2 užduotis. Kvadratinį trinarį $x^2 - 3x + 2$ išskaidykite dauginamaisiais.

Jei kvadratinis trinaris turi šaknų, tai jį galima išskaidyti dauginamaisiais.



Kadangi $x_1 = 1$ ir $x_2 = -4$ yra trinario $2x^2 + 6x - 8$ šaknys, tai

$$2x^2 + 6x - 8 = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - (-4)) = 2(x - 1)(x + 4).$$

Įsitikinkime, kad $2(x - 1)(x + 4) = 2x^2 + 6x - 8$:

$$2(x - 1)(x + 4) = (2x - 2)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 2x - 8 = 2x^2 + 6x - 8.$$

127. Apskaičiuokite kvadratinio trinario reikšmes, kai duotos jo kintamojo reikšmės.
a) $x^2 - 6x + 8$, kai $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 4$;
b) $x^2 + 2x - 3$, kai $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$; $x = 3$;
c) $-y^2 - 5y - 4$, kai $y = -1$; $y = 0$; $y = 3$; $y = 4$.
Kurios iš nurodytų kintamojo reikšmių yra duotojo trinario šaknys?

128. Kuris kvadratinis trinaris turi vieną šaknį? turi dvi šaknis? šaknų neturi?
a) $x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 4x + 3$, $x^2 + 2x + 2$;
b) $x^2 - 8x + 16$, $x^2 - x - 2$, $x^2 + 3x + 5$;
c) $y^2 + 2y + 7$, $y^2 - 10y + 25$, $y^2 - 9y + 20$.

Lygtis $ax^2 + bx + c = 0$:
- turi du sprendinius, kai $D > 0$;
- turi vieną sprendinį, kai $D = 0$;
- sprendinių neturi, kai $D < 0$.



129. Kvadratinis trinaris turi dvi šaknis. Apskaičiuokite tas šaknis, o tada kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais.
a) $x^2 - 8x + 15$; b) $x^2 + x - 56$; c) $3y^2 - 10y + 3$; d) $0{,}1y^2 - 1{,}7y + 7$.

130. Kvadratinis trinaris turi vieną šaknį. Apskaičiuokite tą šaknį, o tada kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais.
a) $x^2 - 16x + 64$; b) $x^2 + 8x + 16$; c) $4y^2 - 4y + 1$; d) $\frac{1}{10}y^2 + 2y + 10$.

Kvadratinis trinaris $9x^2 + 6x + 1$ turi vieną šaknį, nes lygtis $9x^2 + 6x + 1 = 0$ turi vieną sprendinį. Iš tikrųjų:

$D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$, $x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$.

Kartais sakoma, kad šis trinaris turi dvi lygias (kartotines) šaknis:

$x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

Tą trinarį galima išskaidyti dauginamaisiais:

$9x^2 + 6x + 1 = 9\left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Sandaugą $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ galima parašyti kaip kvadratą:

$9x^2 + 6x + 1 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$.

Beje, $9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = (3x + 1)^2$.

Jei kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ turi vieną šaknį x_1, tai

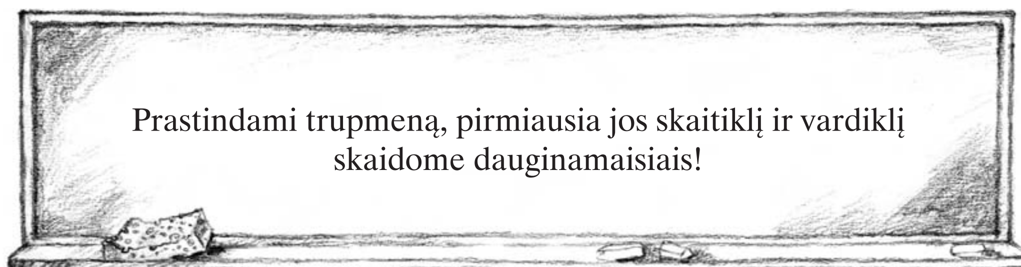
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$.



131. Kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais.
a) $-x^2 - x + 42$; b) $10x^2 + 3x - 1{,}8$; c) $49x^2 + 14x + 1$.

132. Užrašykite kokį nors kvadratinį trinarį, kuris:
a) turėtų dvi skirtingas šaknis $x_1 = -2$, $x_2 = 10$;
b) turėtų vieną šaknį $x_1 = 5$;
c) neturėtų nė vienos šaknies.

2.5. PRASTINAME SUDĖTINGESNES TRUPMENAS SU VIENU KINTAMUOJU



1 užduotis. Suprastinkite trupmeną

$$\frac{x^2-15}{x+\sqrt{15}}.$$

$$\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}=\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{(x-\sqrt{3})\cdot 1}{(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})}=\frac{1}{x+\sqrt{3}}.$$

2 užduotis. Suprastinkite trupmeną

$$\frac{x^2-18x+81}{9-x}.$$

$$\frac{11-x}{x^2-22x+121}=\frac{11-x}{(x-11)^2}=\frac{11-x}{(11-x)^2}=\frac{(11-x)\cdot 1}{(11-x)\cdot(11-x)}=\frac{1}{11-x}.$$

3 užduotis. Suprastinkite trupmeną

$$\frac{2x^2-9x-5}{x^2-2x-15}.$$

Suprastinkime trupmeną $\frac{3x^2+11x-4}{2x^2+7x-4}$.

1) Skaitiklį ir vardiklį skaidome dauginamaisiais:

$3x^2+11x-4=0,\quad D=169,\quad x_1=\frac{1}{3},\ x_2=-4;$
$3x^2+11x-4=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+4).$

$2x^2+7x-4=0,\quad D=81,\quad x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-4;$
$2x^2+7x-4=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+4).$

2) Vadinasi,

$$\frac{3x^2+11x-4}{2x^2+7x-4}=\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+4)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+4)}=\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3x-1}{2x-1}.$$

133. Suprastinkite trupmeną.

a) $\frac{x^2-7}{x-\sqrt{7}}$; b) $\frac{x+\sqrt{12}}{x^2-12}$; c) $\frac{x^2-8}{x+\sqrt{8}}$;
d) $\frac{y+\sqrt{17}}{y^2-17}$; e) $\frac{2y^2-10}{y+\sqrt{5}}$; f) $\frac{y+\sqrt{15}}{3y^2-45}$.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$

134. Trupmenos skaitiklyje ar vardiklyje esantį kvadratinį trinarį parašykite kaip dvinario kvadratą, o tada gautąją trupmeną suprastinkite.

a) $\frac{x^2-14x+49}{x-7}$; b) $\frac{x-12}{x^2-24x+144}$; c) $\frac{x^2+40x+400}{2x+40}$;
d) $\frac{3a-90}{a^2-60a+900}$; e) $\frac{4a^2+4a+1}{2a+1}$; f) $\frac{a^2+\frac{2}{5}a+\frac{1}{25}}{5a+1}$.

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

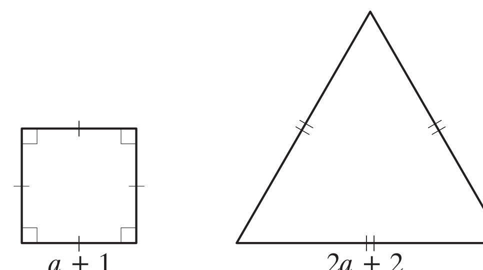
135. Trupmenos skaitiklyje ar vardiklyje esantį kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais, o tada gautąją trupmeną suprastinkite.

a) $\frac{x^2-5x+6}{(x+1)(x+2)}$; b) $\frac{x^2+x-20}{(x+5)(x-2)}$; c) $\frac{2(x-1)(x+10)}{x^2-3x-130}$;
d) $\frac{(n-1)(n+2)}{n^2+5n+6}$; e) $\frac{(n+1)(n+4)}{2n^2-6n-8}$; f) $\frac{3n^2+5n-2}{6(n+2)(n-3)}$.

136. Suprastinkite trupmeną, o tada apskaičiuokite jos reikšmę, kai $x=10$.

a) $\frac{x^2+5x-6}{x^2-8x+7}$; b) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$; c) $\frac{x^2+8x-33}{x^2+14x+33}$;
d) $\frac{5x^2+9x-2}{x^2-3x-10}$; e) $\frac{x^2+3x-28}{4x^2+27x-7}$; f) $\frac{x^2+0{,}4x-0{,}21}{x^2+0{,}6x-0{,}27}$.

137. Paveikslėlyje pavaizduotas kvadratas, kurio kraštinė lygi $a+1$ milimetrų, ir lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi $2a+2$ milimetrų.



1) Užrašykite, kam lygus kvadrato: a) perimetras P_1; b) plotas S_1.
2) Užrašykite, kam lygus trikampio: a) perimetras P_2; b) plotas S_2.
3) Kurios figūros perimetras yra didesnis? kiek procentų didesnis?
4) Kurios figūros plotas yra didesnis? kiek kartų didesnis?

APIBENDRINAME

Raidinės trupmenos
Trupmena, kurios vardiklyje yra raidžių (kintamųjų), vadinama *raĩdine trùpmena*.
Trupmenos raidės vadinamos jos kintamaisiais.
Trupmenos reikšmė priklauso nuo kintamųjų reikšmių.
Trupmena neturi prasmės su tomis kintamųjų reikšmėmis, su kuriomis jos vardiklis lygus 0.

$\frac{8x^2}{6x}$ ← skaitiklis ← vardiklis
x — kintamasis

Trupmena $\frac{4x}{x-1}$ neturi prasmės, kai $x-1=0$, $x=1$.

Pagrindinė trupmenos savybė
Trupmenos reikšmė nepasikeičia jos skaitiklį ir vardiklį padauginus ar padalijus iš to paties nelygaus 0 skaičiaus ar reiškinio.

$\frac{8x^2}{6x} = \frac{8x^2:(2x)}{6x:(2x)} = \frac{4x}{3}$.

Trupmenos prastinimas
Jei trupmenos skaitiklis ir vardiklis turi bendrų dauginamųjų, tai tą trupmeną galima suprastinti.

$\frac{8x^2}{6x} = \frac{4x\cdot 2x}{3\cdot 2x} = \frac{4x}{3}$.

Kvadratinio trinario skaidymas dauginamaisiais
Kintamojo x reikšmės, su kuriomis $ax^2+bx+c=0$, vadinamos kvadratinio trinario ax^2+bx+c *šaknimìs*.

x^2+x-2 šaknys:
$x_1=1$, $x_2=-2$.

Jei kvadratinis trinaris turi šaknų, tai jį galima išskaidyti dauginamaisiais.

$3x^2-6x+3$ šaknis $x_1=1$.
$2x^2+5x+6$ šaknų neturi.

- Jei trinaris turi dvi skirtingas šaknis x_1 ir x_2, tai $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$.

- Jei trinaris turi vieną šaknį x_1 (sakoma taip pat: dvi lygias šaknis $x_1=x_2$), tai $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_1)=a(x-x_1)^2$.

$3x^2-6x+3=3(x-1)^2$.

Jei trinaris šaknų neturi, tai jis dauginamaisiais neišskaidomas.

$2x^2+5x+6$ dauginamaisiais neišskaidomas.

Veiksmai su raidinėmis trupmenomis
Veiksmai su raidinėmis trupmenomis atliekami taip, kaip ir su skaitinėmis trupmenomis.

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a\pm c}{b}$, $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad\pm cb}{bd}$;

$\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=\frac{2+3}{x}=\frac{5}{x}$,

$\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x^2}-\frac{x}{x^2}=\frac{2-x}{x^2}$,

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$;

$\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x}=\frac{2\cdot 3}{x\cdot x}=\frac{6}{x^2}$,

$\frac{2}{x}:\frac{3}{x}=\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3}=\frac{2}{3}$,

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

$\left(\frac{2}{x}\right)^2=\frac{2^2}{x^2}=\frac{4}{x^2}$.

Kam lygi trupmena $\frac{x^2-1}{x+1}$?

Prisiminkime skyriaus pradžią (žr. p. 34).

> Sugalvotą skaičių pakelk kvadratu ir atimk vienetą.
> Gautą rezultatą padalyk iš vienetu didesnio už sugalvotą skaičiaus.
> ***Gavai skaičių vienetu mažesnį už sugalvotąjį!***

Sugalvotą skaičių pažymėkime x. Tada pagal sąlygą reiškinio

$$\frac{x^2-1}{x+1}$$

reikšmės su visais skaičiais x turi būti lygios $x-1$.

1 užduotis. Apskaičiuokite reiškinio $\frac{x^2-1}{x+1}$ reikšmę, kai:

a) $x=10$; b) $x=\frac{2}{3}$; c) $x=\sqrt{2}$.

Įsitikinkite, kad gautoji reikšmė atitinkamai lygi:

a) $10-1=9$; b) $\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$; c) $\sqrt{2}-1$;

t. y. yra vienetu mažesnė už x reikšmę.

> Trupmenos $\frac{x^2-1}{x+1}$ kol kas neprastinkite!

Kai $x=\sqrt{3}$, tai $\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(\sqrt{3})^2-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{3-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

Įsitikinkime, kad gautoji reikšmė $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ lygi $\sqrt{3}-1$.

I būdas. $\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$, $\quad |\cdot(\sqrt{3}+1)$

$2=(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)$,

$2=(\sqrt{3})^2-1^2$,

$2=3-1$ — lygybė teisinga.

II būdas. Pertvarkykime trupmeną $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ — jos skaitiklį ir vardiklį padauginkime iš tokio skaičiaus, kad vardiklyje neliktų šaknų, t. y. vardiklis nebūtų iracionalusis skaičius:

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\cdot(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1.$$

2 užduotis. Su kokia x reikšme trupmena $\frac{x^2-1}{x+1}$ neturi prasmės? Su kokiu skaičiumi nagrinėjamas teiginys yra neteisingas?

3 užduotis. Įrodykite, kad kai $x\neq -1$, tai $\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$.

SPRENDŽIAME

138. Su kuriomis kintamojo reikšmėmis trupmena neturi prasmės?

a) $\frac{x^2}{x+3}$; b) $\frac{x-5}{x^2}$; c) $\frac{3y}{y^2-2y}$; d) $\frac{7-3x}{x+4x^2}$; e) $\frac{5y}{2y^2+3y-2}$; f) $\frac{a^2-4}{a^2+a-2}$.

139. Su kuriomis kintamojo reikšmėmis trupmenos reikšmė lygi 0?

a) $\frac{x(x-7)}{x-3}$; b) $\frac{x^2-4x}{x}$; c) $\frac{x^2-9}{2x+1}$; d) $\frac{3y^2-10y+3}{y^2-4}$; e) $\frac{y^2+1}{y^2-1}$.

140. Nurodykite kintamojo reikšmes, su kuriomis trupmeninis reiškinys turi prasmę.

a) $\frac{4}{x-\sqrt{2}}$; b) $\frac{x}{x(x+2)}$; c) $\frac{y-5}{y^2-25}$; d) $\frac{8y}{y^2+2}$; e) $\frac{3a^2-a+1}{a^2-\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}}$;

f) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}$; g) $\frac{x}{x^2-5}-\frac{1}{x+5}$; h) $\frac{y^2-1}{y^2+\sqrt{3}y}+\frac{y^2-3}{y^2+4y-5}$.

141. Suprastinkite trupmeną.

a) $\frac{7x^2-112}{14x-56}$; b) $\frac{12-y}{y-12}$; c) $\frac{10x^2-2x}{1-25x^2}$; d) $\frac{9x^2-1}{9x^2-6x+1}$;

e) $\frac{18x^2-15x}{25-36x^2}$; f) $\frac{(a-2)^2}{(2-a)^2}$; g) $\frac{5b(b-5)}{b^3(5-b)}$; h) $\frac{m^2-4m+4}{m^2-2m}$.

142. Sudėkite (atimkite) trupmenas.

a) $\frac{x^2+3}{x+1}+\frac{x^2}{x+1}$; b) $\frac{a^2}{a^2-1}-\frac{a}{a^2-1}$; c) $\frac{4}{y-1}+\frac{2}{1-y}$;

d) $\frac{9}{2-m}-\frac{7}{m-2}$; e) $\frac{2}{5a+5}+\frac{4a}{3(a+1)}$; f) $\frac{5x}{6x+12}-\frac{3}{5x+10}$;

g) $\frac{2m}{3m+15}+\frac{3m-5}{m^2-25}$; h) $\frac{3k}{2k^2-18}-\frac{k-1}{3k+9}$; i) $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x^2-6x+9}$.

143. Sudauginkite (padalykite) trupmenas.

a) $\frac{a^2+5a}{a-1}\cdot\frac{a^2-1}{a+5}$; b) $\frac{x^2-2x}{x+1}:\frac{x-2}{x^2-1}$; c) $\frac{y^2+4y+4}{y-4}\cdot\frac{y^2-16}{y+2}$;

d) $\frac{a^2-6a+9}{a+2}:\frac{a-3}{a^2-4}$; e) $\frac{3-x^2}{x^2-3x-10}\cdot\frac{x-5}{\sqrt{3}-x}$; f) $\frac{y^2+7y+12}{10-y^2}:\frac{y+3}{\sqrt{10}-y}$.

144. Kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais.

a) $2x^2-5x-2$; b) $y^2-3\sqrt{3}y+6$; c) $-y^2+2\sqrt{2}y+12$;

d) $-\frac{1}{2}y^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}y+10$; e) $x^2-8x+10$; f) x^2+3x+1.

Išskaidykime kvadratinį trinarį $x^2-2\sqrt{5}x-75$ dauginamaisiais.

1) Randame trinario šaknis. Sprendžiame lygtį:

$$x^2-2\sqrt{5}\cdot x-75=0,\ D=\left(-2\sqrt{5}\right)^2-4\cdot1\cdot(-75)=4\cdot5+300=320.$$

$$x_1=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{320}}{2}=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{64\cdot5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}-8\sqrt{5}}{2}=\frac{-6\sqrt{5}}{2}=-3\sqrt{5};$$

$$x_2=\frac{2\sqrt{5}+8\sqrt{5}}{2}=\frac{10\sqrt{5}}{2}=5\sqrt{5}.$$

2) Skaidome dauginamaisiais:

$$x^2-2\sqrt{5}x-75=1\cdot\left(x-\left(-3\sqrt{5}\right)\right)\cdot\left(x-5\sqrt{5}\right)=\left(x+3\sqrt{5}\right)\left(x-5\sqrt{5}\right).$$

Pasitikriname:

$(x+3\sqrt{5})\cdot(x-5\sqrt{5})=x^2-5\sqrt{5}x+3\sqrt{5}x-3\sqrt{5}\cdot5\sqrt{5}=$

$=x^2-2\sqrt{5}x-15\cdot5=x^2-2\sqrt{5}x-75.$

145. Suprastinkite trupmeną.

a) $\frac{x^2+4x-77}{x^2-18x+77}$; b) $\frac{x^2+3{,}8x-6}{x^2+8{,}8x-12}$; c) $\frac{x^2-3\sqrt{6}x+12}{x^2-6}$;

d) $\frac{y^2-3}{y^2+6\sqrt{3}y+15}$; e) $\frac{y^2+4\sqrt{5}y-25}{y^2+3\sqrt{5}y-50}$; f) $\frac{y^2-2\sqrt{6}y-18}{0{,}5y^2-2\sqrt{6}y+9}$.

146. Suprastinę trupmeną, apskaičiuokite jos reikšmę.

a) $\frac{3x^2-3x}{5x^2-5}$, kai $x=2$; b) $\frac{9y^2-1}{9y^2-6y+1}$, kai $y=1$;

c) $\frac{25x^2+20x+4}{4-25x^2}$, kai $x=-0{,}5$; d) $\frac{4{,}9y^2-0{,}9}{4{,}9y^2-4{,}2y+0{,}9}$, kai $y=\frac{1}{7}$.

147. Suprastinkite raidinį reiškinį.

a) $\frac{x+5}{x^2+25}\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}\right)$; b) $\frac{7}{3y-1}-\frac{5}{2y-1}:\frac{3y-1}{4y^2-1}$;

c) $\left(1-\frac{4a}{1+a}+a\right)\cdot\left(1+\frac{4a}{1-a}-a\right)$; d) $\left(m-\frac{1-2m^2}{1-m}+1\right):\left(1-\frac{1}{1-m}\right)$.



148. Suprastinkite trupmeną.

a) $\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$; b) $\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{x}}}$; c) $\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x}-1}+1}$; d) $\frac{3}{\frac{3}{3-\frac{3}{x}}+3}$.



149. Suprastinkite trupmeną su moduliu.

a) $\frac{|x|}{3x}$; b) $\frac{4x}{|x|}$; c) $\frac{|x+7|}{x^2-49}$; d) $\frac{x^2-225}{|x-15|}$.

$\frac{|x-3|}{2x^2-6x}=\frac{|x-3|}{2x(x-3)}$, $\Rightarrow$ $x\neq0$ ir $x\neq3$.

$|a|=a$, kai $a\geqslant0$;
$|a|=-a$, kai $a<0$.

Kai $x>3$, tai $\frac{|x-3|}{2x(x-3)}=\frac{x-3}{2x(x-3)}=\frac{1}{2x}$.

Kai $x<3$ ir $x\neq0$, tai $\frac{|x-3|}{2x(x-3)}=\frac{-(x-3)}{2x(x-3)}=\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2x}$.



Trupmeniniai reiškiniai su keliais kintamaisiais

1 užduotis. Nagrinėkime trupmeną su dviem kintamaisiais:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}.$$

1) Nuo ko priklauso trupmenos reikšmė? Ar su visomis kintamųjų a ir b reikšmėmis trupmena turi prasmę?

> Trupmena $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$ neturi prasmės, kai
> $a^2-b^2=0$, t. y. kai $(a-b)\cdot(a+b)=0$, $\Rightarrow$ kai $a-b=0$, arba $a+b=0$,
> $\underline{a=b}$; $\underline{a=-b}$.

2) Trupmenos skaitiklį ir vardiklį išskaidykite dauginamaisiais, o tada tą trupmeną suprastinkite.

> $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$

3) Apskaičiuokite trupmenos reikšmę, kai:
a) $a=3,\ b=1$; b) $a=3,\ b=0$; c) $a=0,\ b=-1$.

2 užduotis. Įsitikinkite, kad teisinga yra lygybė

$$\frac{6x^2-2y^2}{\sqrt{3}x+y}=2\sqrt{3}x-2y.$$

1) Kairiojoje lygybės pusėje esančios trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginkite iš tokio reiškinio, kad atskliautus gautosios trupmenos vardiklį jame nebūtų šaknų:

$$\frac{(6x^2-2y^2)\cdot(......)}{(\sqrt{3}x+y)\cdot(......)}.$$

> $\frac{1}{\sqrt{a}+b}=\frac{1\cdot(\sqrt{a}-b)}{(\sqrt{a}+b)\cdot(\sqrt{a}-b)}=\frac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a})^2-b^2}=$
> $=\frac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}.$
> *Sakoma*: Panaikinome iracionalumą trupmenos vardiklyje.

2) Atskliautę trupmenos vardiklį, suprastinkite gautąją trupmeną.

3) Kokiu kitu būdu galima įsitikinti, kad duotoji lygybė yra teisinga?

150. Suprastinkite trupmeną.
a) $\frac{24m^3}{16m^2n}$; b) $\frac{6a^2b^2}{8a^3b^4}$; c) $\frac{3a^2bc}{9ab^2c^3}$.

> $\frac{15a^4b}{20a^3b^3}=\frac{5a^3b\cdot 3a}{5a^3b\cdot 4b^2}=\frac{3a}{4b^2}.$

151. Trupmenos skaitiklį ir vardiklį išskaidykite dauginamaisiais, o tada tą trupmeną suprastinkite.
a) $\frac{6a-6b}{12a-12b}$; b) $\frac{a^5b+ab^5}{4a^5b^5}$; c) $\frac{5x^4y^4}{x^4y-y^4x}$; d) $\frac{8x^2y+2xy}{4x+1}$;
e) $\frac{2m^2+4y^2}{7m^5y^3+14m^3y^5}$; f) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$; g) $\frac{m^2+2mn+n^2}{2m^3n+2m^4}$; h) $\frac{9x^2y+3xy^2}{-2y-6x}$.

152. Naudodamiesi formule
$x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$,
suprastinkite trupmeną.
a) $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$; b) $\frac{m^2-x^2}{m^4-x^4}$; c) $\frac{9a^4-16b^4}{\sqrt{3}a+2b}$; d) $\frac{\sqrt{7}x-y}{y^4-49x^4}$; e) $\frac{81x^4-16y^4}{4y^2-9x^2}$.

153. Atlikite veiksmus su trupmenomis.
a) $\frac{a^2}{5(a-b)}+\frac{b^2}{4(a-b)}$; b) $\frac{3x}{7(x+y)}-\frac{5y}{14(x+y)}$; c) $\frac{a-2b}{3b}+\frac{b-2a}{3a}$;
d) $\frac{3xy-1}{4x^3}-\frac{3y}{4x^2}$; e) $\frac{2x-7y}{2x^2y}+\frac{8x-5y}{5xy^2}$; f) $\frac{1-b^2}{3a^2b}-\frac{2b-1}{6ab^2}$;
g) $\frac{14a^2b}{3x^3}\cdot\frac{8x^2}{21a^2b}$; h) $-\frac{10x^2y^2}{9a^2}:\frac{5xy}{27a^3}$; i) $\frac{ax+x^2}{a+4}\cdot\frac{2a+8}{a^2-x^2}$;
j) $18a^3b:\frac{9a^4}{2b^2}$; k) $(4x^2-9y^2)\cdot\frac{2x+3y}{3y-2x}$; l) $\left(\frac{x}{y^2}\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$.

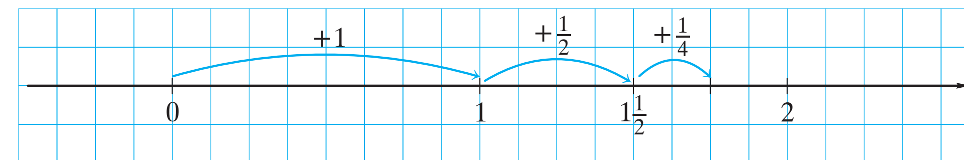
154. Panaikinkite iracionalumą trupmenos vardiklyje.
a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$; c) $\frac{\sqrt{20}+\sqrt{5}}{\sqrt{20}-\sqrt{5}}$; d) $\frac{17}{\sqrt{b}}$; e) $\frac{3a-3b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; f) $\frac{x^2-y}{x+\sqrt{y}}$.

155. Įsitikinkite, kad lygybė yra teisinga.
a) $\frac{5(x^4-y)}{x^2+\sqrt{y}}=5x^2-5\sqrt{y}$; b) $\frac{7y-x^2y}{\sqrt{7}-x}=xy+\sqrt{7}y$.



156. Kam lygi begalybės skaičių suma: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots=?$

Naudodamiesi skaičių tiese, šią sumą galime pavaizduoti taip:



Kuo ilgiau tęsime šį procesą, tuo arčiau būsime skaičiaus 2. Vadinasi,
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=2$.

Užduotis. Įsitikinkite, kad $0,(9)=1$.

> 0,999... = 1.

TESTAS

157. Kai $x = 1$, tai trupmenos $\frac{x-5}{x}$ reikšmė lygi:
A -6 **B** -5 **C** -4 **D** -3

158. Trupmena $\frac{4-x}{x+4}$ neturi prasmės, kai:
A $x = 0$ **B** $x = 4$ **C** $x = -4$ **D** $x \in (-\infty; -4),\ (-4; +\infty)$

159. $\frac{2x-1}{x-3} = 0$, kai:
A $x = \frac{1}{2}$ **B** $x = \frac{1}{3}$ **C** $x = 0$ **D** $x = 3$

160. Suprastinę trupmeną $\frac{15x^2}{20x^4}$, gausime:
A $\frac{3x^2}{4}$ **B** $\frac{15}{20}$ **C** $\frac{3}{4x^2}$ **D** $\frac{3}{4x}$

161. Suprastinę trupmeną $\frac{m-3}{3-m}$, gausime:
A -1 **B** 1 **C** 0 **D** 3

162. Suprastinę trupmeną $\frac{x^2-8x}{4x}$, gausime:
A $\frac{x^2-2}{x}$ **B** $\frac{x-8}{4x}$ **C** $\frac{x-8}{4}$ **D** $x^2 - 2$

163. Suprastinę trupmeną $\frac{2m-10}{5-m}$, gausime:
A 2 **B** $m - 5$ **C** -2 **D** 5

164. Kuris reiškinys yra trupmenų
$\frac{3}{m-1}$ ir $\frac{4}{m+1}$
bendrasis vardiklis?
A $(m-1)^2$ **B** $m^2 + 1$ **C** $(m+1)^2$ **D** $m^2 - 1$

165. Kuris reiškinys yra trupmenų
$\frac{1}{2x(x-1)}$ ir $\frac{5}{3x^2(x-1)}$
bendrasis vardiklis?
A $2x(x-1)$ **B** $3x^2(x-1)$ **C** $6x^2(x-1)$ **D** $x^2(x-1)$

166. $\frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x-1} =$ **A** $\frac{2x^2}{x-1}$ **B** $\frac{3x}{x-1}$ **C** $\frac{x}{x-1}$ **D** $\frac{3x^2}{x-1}$

167. $\frac{3y-1}{y} - \frac{2y+1}{y} =$ **A** $\frac{y-2}{y}$ **B** $\frac{5}{y}$ **C** $\frac{y+2}{y}$ **D** 1

168. $\frac{a-3}{a+1} + \frac{3}{a} =$ **A** $\frac{a^2+3}{a(a+1)}$ **B** $\frac{a}{a(a+1)}$ **C** $\frac{a+1}{a}$ **D** $\frac{a^2-6a}{4(a+1)}$

169. $\frac{5}{x-7} - \frac{1}{x+7} =$ **A** $\frac{4x+42}{(x+7)(x-7)}$ **B** $\frac{6x+42}{(x-7)(x+7)}$ **C** $\frac{4x+28}{(x-7)(x+7)}$ **D** $\frac{5x+7}{-14}$

170. $6x + \frac{1}{x} =$ **A** $\frac{6x+1}{x}$ **B** $\frac{6x^2+1}{x}$ **C** $\frac{6x^2+x}{x}$ **D** $\frac{6}{x}$

171. $\frac{2}{m} - 3m =$ **A** $\frac{2-3m}{m}$ **B** $\frac{2-3m^2}{m}$ **C** $\frac{2-3m^2}{m^2}$ **D** $-\frac{1}{m}$

172. $\frac{5m^2}{8} \cdot \frac{4}{m^3} =$ **A** $\frac{5}{m^3}$ **B** $\frac{5m}{2}$ **C** $\frac{5}{2m}$ **D** $\frac{5m^5}{32}$

173. $\frac{3x^2}{5} : 10x =$ **A** $\frac{3x^2}{10}$ **B** $\frac{3x}{50}$ **C** $\frac{3x^4}{50}$ **D** $\frac{3x}{2}$

174. $\frac{x+1}{30x^2} \cdot \frac{15x}{x^2-1} =$ **A** $\frac{1}{2x(x-1)}$ **B** $\frac{1}{2x(x+1)}$ **C** $\frac{2}{x(x-1)}$ **D** $\frac{x}{2(x+1)}$

175. $\frac{m^2-4}{4m^2} : \frac{m-2}{2m} =$ **A** $\frac{m-2}{2m}$ **B** $\frac{m+2}{2m}$ **C** $\frac{2m}{m-2}$ **D** $\frac{2m}{m+2}$

176. Kvadratinio trinario $x^2 - 5x + 6$ šaknys yra:
A -2 ir -3 **B** -2 ir 3 **C** 2 ir -3 **D** 2 ir 3

177. Kvadratinis trinaris $x^2 - 30x + 225$:
A turi vienintelę šaknį **B** turi dvi skirtingas šaknis **C** šaknų neturi
D gali turėti šaknų, bet gali jų ir neturėti

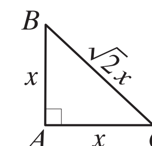
178. Kvadratinis trinaris:
a) $x^2 + 3x + 5$; b) $x^2 - 8x - 9$
A turi dvi šaknis **B** turi vienintelę šaknį **C** šaknų neturi
D gali turėti šaknų, bet gali jų ir neturėti

179. Išskaidę kvadratinį trinarį $x^2 - 20x + 100$ dauginamaisiais, gausime:
A $(x-20)(x+20)$ **B** $(x-20)^2$ **C** $(x+20)^2$ **D** $(x-10)^2$

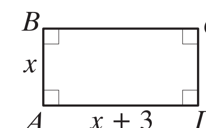
180. Išskaidę kvadratinį trinarį $x^2 + 4x - 12$ dauginamaisiais, gausime:
A $(x-2)(x+6)$ **B** $(x+2)(x+6)$ **C** $(x-2)(x-6)$ **D** $(x+2)(x-6)$

181. Suprastinę trupmeną $\frac{(x-4)^2}{x^2-16}$, gausime:
A 1 **B** $\frac{x-4}{x+4}$ **C** $\frac{x-4}{x-16}$ **D** $\frac{x}{x^2-4}$

182. Kuris reiškinys nurodo trikampio ABC plotą?
A $\frac{x^2}{2}$ **B** $\frac{x^2}{4}$ **C** $1\frac{3}{2}x$ **D** $\frac{\sqrt{2}x^2}{2}$



183. Kuris reiškinys nurodo stačiakampio $ABCD$ perimetrą?
A $2x + 3$ **B** $2x + 6$ **C** $x(x+3)$ **D** $4x + 6$



PASITIKRINAME

184. Apskaičiuokite trupmenos reikšmę.

a) $\frac{x}{x+4}$, kai $x=5$, $x=0$, $x=1$; b) $\frac{x-7}{x}$, kai $x=1$, $x=6$, $x=-7$;

c) $\frac{3x}{x+5}$, kai $x=1$, $x=-1$, $x=0$; d) $\frac{x^2-1}{x^2}$, kai $x=1$, $x=-1$, $x=\sqrt{2}$.

185. Su kuriomis y reikšmėmis trupmena neturi prasmės?

a) $\frac{8+y}{y}$; b) $\frac{y}{y-2}$; c) $\frac{y-7}{2y+12}$; d) $\frac{3y}{y(y+1)}$.

186. Su kuriomis a reikšmėmis trupmenos reikšmė lygi 0?

a) $\frac{a+7}{a}$; b) $\frac{a}{a-4}$; c) $\frac{a+15}{2a^2}$; d) $\frac{a(a-9)}{a+3}$.

187. Suprastinkite trupmeną.

a) $\frac{24x^3}{8x}$; b) $\frac{12x^2}{36x^3}$; c) $\frac{14y}{28y^2}$; d) $\frac{51y^3}{17y^2}$;

e) $\frac{2x+2}{2}$; f) $\frac{4x-12}{x-3}$; g) $\frac{x^2-100}{x+10}$; h) $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$;

i) $\frac{x-9}{x^2-81}$; j) $\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}$; k) $\frac{-y+7}{y-7}$; l) $\frac{8-m}{m-8}$.

188. Sudėkite (atimkite) trupmenas.

a) $\frac{11}{m}+\frac{2}{m}$; b) $\frac{22}{y}-\frac{3}{y}$; c) $\frac{x}{x-5}+\frac{2}{x-5}$; d) $\frac{a}{2a+2}-\frac{3}{2a+2}$;

e) $\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}$; f) $\frac{9}{y^2}-\frac{4}{y}$; g) $\frac{5a}{a-1}+\frac{3}{a}$; h) $\frac{5y}{y+2}-\frac{7}{y-2}$;

i) $8+\frac{1}{a}$; j) $m-\frac{2}{m}$; k) $\frac{6}{y}-3y$; l) $\frac{2}{3x}-4x$.

189. Sudauginkite (padalykite) trupmenas.

a) $\frac{10}{x}\cdot\frac{3}{x^2}$; b) $\frac{4y}{5}\cdot\frac{2y}{3}$; c) $\frac{m+2}{4m}\cdot\frac{m-2}{3m}$;

d) $\frac{a}{a-5}\cdot\frac{a^2}{a+5}$; e) $\frac{4}{a+2}:\frac{7}{a}$; f) $\frac{3}{y+1}:\frac{5}{y-1}$;

g) $\frac{m}{m^2+1}:\frac{m}{6}$; h) $\frac{14}{x^2}:\frac{x}{x^2+1}$; i) $\frac{3a}{a-2}\cdot\frac{a-2}{6a}$;

j) $\frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x^2}$; k) $\frac{(y-2)^2}{12y}\cdot\frac{4y^2}{y-2}$; l) $\frac{(m+3)^3}{3m^3}\cdot\frac{6m^2}{(m+3)^2}$;

m) $\frac{m^2}{m^2+1}:\frac{2m}{m^2+1}$; n) $\frac{a^2+3}{3}:\frac{a^2+3}{6a^2}$; o) $\frac{(x-7)^2}{x}:\frac{(x-7)^3}{7x^2}$;

p) $\frac{y+4}{y}:\frac{(y+4)^2}{4y^3}$; r) $\frac{a^2-1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a+1}$; s) $\frac{x^2-4x}{2}\cdot\frac{8}{x-4}$;

t) $\frac{2m-6}{5}\cdot\frac{10m}{9m-27}$; u) $\frac{2x^2-8}{5}\cdot\frac{15x}{x+2}$; v) $\frac{5-m}{m}:\frac{m^2-25}{7m^2}$;

z) $\frac{a+1}{a-1}:\frac{a^2+a}{a^2-1}$; q) $\frac{x^2-4x}{4}:\frac{x-4}{8x}$; w) $\frac{3x}{2x-3}:\frac{9x^2}{4x^2-9}$.

190. 1) Apskaičiuokite kvadratinio trinario reikšmę.

a) $x^2+2x-15$, kai $x=-5$; $x=-4$; $x=-3$; $x=3$;

b) x^2-3x-4, kai $x=-1$; $x=0$; $x=1$; $x=4$.

2) Nustatykite to trinario šaknis.

191. Kuris iš kvadratinių trinarių **A**, **B** ir **C** turi vienintelę šaknį? turi dvi skirtingas šaknis? šaknų neturi?

a) **A** x^2+x+2 **B** $x^2-16x+64$ **C** $x^2-11x+18$

b) **A** $x^2-9x+20$ **B** $2x^2-5x+7$ **C** $x^2+22x+121$

192. Ar kvadratinis trinaris išskaidomas dauginamaisiais?

a) $x^2+2x-15$; b) $x^2+2x+15$; c) x^2-4x+9;

d) x^2-4x-9; e) $x^2-10x+25$; f) $x^2-10x+26$.

193. Kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais.

a) x^2+2x-8; b) x^2-6x-7; c) $x^2+3x-18$;

d) $2x^2+5x-3$; e) $x^2+0{,}4x-0{,}21$; f) $3x^2+8x-3$.

194. Kvadratinis trinaris turi vieną šaknį. Apskaičiuokite ją, o tada kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais.

a) $x^2-26x+169$; b) $x^2+5x+6{,}25$; c) $x^2-3x+2{,}25$;

d) $x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}$; e) $4x^2-20x+25$; f) $9x^2+12x+4$.

195. Suprastinkite trupmeną.

a) $\frac{x^2-x-90}{x^2-100}$; b) $\frac{x^2-81}{x^2+2x-63}$; c) $\frac{x^2+2x-24}{x^2+10x+24}$;

d) $\frac{y^2+2{,}5y+1{,}5}{y^2+0{,}5y-1{,}5}$; e) $\frac{3y-3}{3y^2-3}$; f) $\frac{4y^2}{6y+4y^2}$.

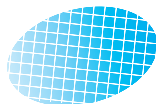
196. Įsitikinkite, kad su visomis galimomis x reikšmėmis lygybė yra teisinga.

a) $\frac{x^2-5}{\sqrt{x}+5}=\sqrt{x}-5$; b) $\frac{\sqrt{x}-11}{x^2-11}=\frac{1}{\sqrt{x}+11}$.

197. Sugalvotą nelygų 0 skaičių padauginę iš 2 ir atėmę sugalvoto skaičiaus kvadratą, o tada gautą rezultatą padaliję iš skaičiaus, kuris yra 2 vienetais mažesnis už sugalvotąjį, gauname skaičių, priešingą sugalvotajam.
Ar teisingas šis teiginys? Atsakymą pagrįskite.

Skaičiai $+a$ ir $-a$ vadinami vienas kitam *príešingais skaĩčiais*.

Skaičiai a ir $\frac{1}{a}$ vadinami vienas kitam *atvirkštìniais skaĩčiais*.



198. Raskite du skaičius, kurių:
a) suma lygi 20, o skirtumas lygus 4;
b) suma lygi 30, o vienas skaičius 5 kartus didesnis už kitą.

199. 5 puodeliai ir 4 lėkštelės iš viso kainuoja 12 Lt, o 4 puodeliai ir 5 lėkštelės iš viso kainuoja 12 Lt 30 ct. Kiek kainuoja vienas puodelis ir viena lėkštelė atskirai?

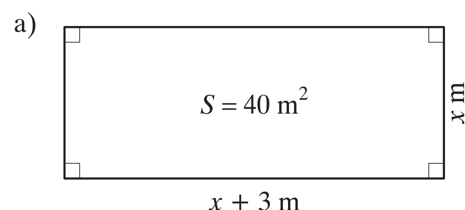
200. Pirmoje dėžėje obuolių buvo dvigubai daugiau negu antrojoje. Kai iš pirmos dėžės paėmė 5 kg obuolių, o iš antrosios — 10 kg, tai pirmoje dėžėje liko trigubai daugiau obuolių negu jų liko antrojoje. Kiek kilogramų obuolių buvo kiekvienoje dėžėje iš pradžių?

201. Mantas metė į taupyklę tik 50 ct ir 20 ct vertės monetas ir surinko 26 litus. Kiek kokios vertės monetų yra taupyklėje, jei iš viso joje yra 100 monetų?

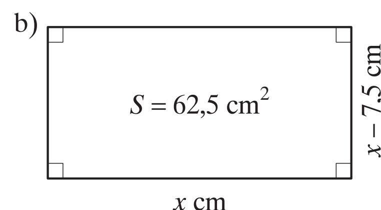
202. Iš skirtingų miestų tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvažiavo du automobiliai. Vieno automobilio greitis yra 80 km/h, kito — 85 km/h. Koks atstumas yra tarp miestų, jei automobiliai susitiko po 2 h 12 min?

203. Remdamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite x reikšmę.

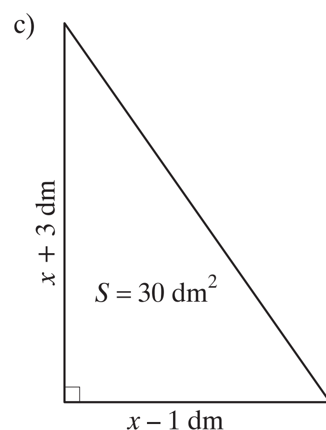
a)



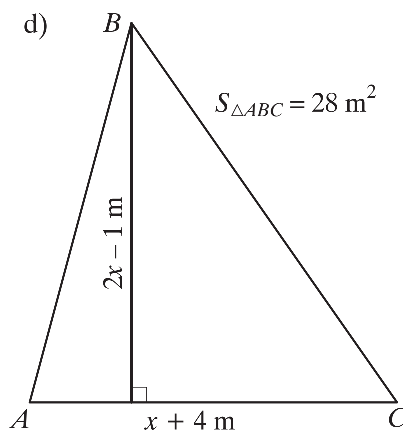
b)



c)



d)



204. Apskaičiuokite lygčių sistemos sprendinį.

a) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 15, \\ 3x + y = 10; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x - 2y = -1, \\ -2x - y = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 3x + 4y = 2; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 5y = 11, \\ 3x + 2y = -12; \end{cases}$ f) $\begin{cases} -9y + 4x = 5, \\ -3x + 7y = -2. \end{cases}$

Išspręskime lygčių sistemą $\begin{cases} x + 2y = -5, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$

I būdas. (Keitimo būdas.)

$$\begin{cases} x + 2y = -5, \\ 2x - y = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 - 2y, \\ 2(-5 - 2y) - y = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 - 2y, \\ -10 - 4y - y = 5; \end{cases} \Rightarrow$$

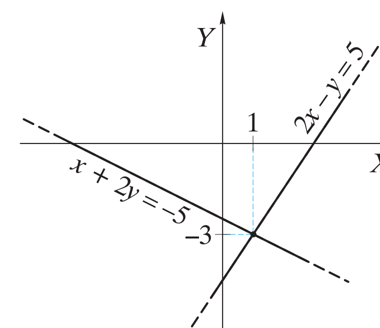
$$\begin{cases} x = -5 - 2y, \\ -5y = 15; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 - 2y, \\ y = -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 - 2 \cdot (-3) = 1, \\ y = -3. \end{cases}$$

II būdas. (Sudėties būdas.)

$$\begin{cases} x + 2y = -5, \quad | \cdot 2 \\ 2x - y = 5; \end{cases} \Rightarrow - \begin{cases} 2x + 4y = -10, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$$

$$5y = -15,$$
$$y = -3; \quad \Rightarrow \quad x + 2 \cdot (-3) = -5, \quad x = 1.$$

III būdas. (Grafinis būdas.)
Braižome abiejų sistemos lygčių grafikus — tieses.



Tiesės kertasi taške (1; –3). Šio taško koordinatės ir yra sistemos $\begin{cases} x + 2y = -5, \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ sprendinys.

Atsakymas. (1; –3).

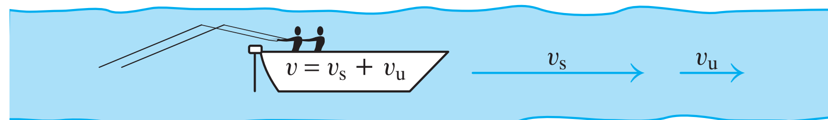


Žvejai

Žvejai motorine valtimi plaukiojo upe, kurios tėkmės greitis lygus 2 kilometrams per valandą.

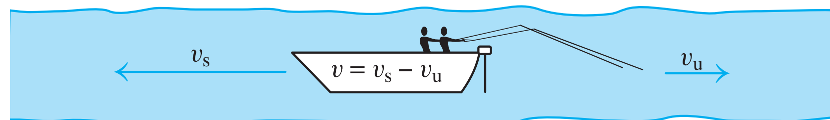
1 užduotis. Kiek kilometrų (kranto atžvilgiu) per 2 valandas pasroviui nuplauktų žvejai, jei valties savasis greitis būtų lygus 10 kilometrų per valandą?

Plaukiant *pasroviui*, greitis (kranto atžvilgiu) yra lygus valties savojo greičio ir upės tėkmės greičio sumai:

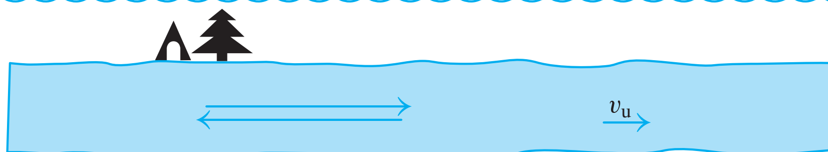


2 užduotis. Kokiu savuoju greičiu turėtų plaukti valtis, kad per 3 valandas prieš srovę nuplauktų 24 kilometrus?

Plaukiant *prieš srovę*, greitis (kranto atžvilgiu) yra lygus valties savojo greičio ir upės tėkmės greičio skirtumui:



3 užduotis. Žvejai išplaukė iš stovyklavietės pasroviui ir apsisukę grįžo atgal. Plaukdami jie užtruko 5 valandas ir iš viso nuplaukė 48 kilometrus. Koks buvo valties savasis greitis?



Valties savąjį greitį pažymėkime x $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Greitis pasroviui yra $x + 2$ $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Greitis prieš srovę yra $\ldots$ $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Pasroviui plaukė $\frac{24}{x+2}$ (h).

Prieš srovę plaukė $\ldots$ (h).

Iš viso plaukė $\frac{24}{x+2} + \ldots = 5$ (h).

. . . .

O kaip išspręsti lygtį $\frac{24}{x+2} + \cdots = 5$?

Šiame skyriuje ir mokysimės spręsti tokias lygtis.

Šiame skyriuje mokysimės spręsti lygtis, kurias galima užrašyti taip:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

čia $f(x)$ ir $g(x)$ yra reiškiniai su vienu kintamuoju.

- Mokysimės spręsti lygtis, kurių nežinomasis yra vardiklyje.
- Nagrinėsime tekstinius uždavinius, kuriuos sprendžiant gaunama trupmeninė lygtis.
- Mokysimės spręsti lygčių sistemas, kurių viena lygtis yra tiesinė, o kita netiesinė.

3.1. SPRENDŽIAME TRUPMENINES LYGTIS $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Prisiminkime:
Trupmena yra lygi 0, kai jos skaitiklis lygus 0, o vardiklis nelygus 0, t. y.

$$\frac{a}{b} = 0, \quad \text{kai} \quad a = 0, b \neq 0.$$

1 užduotis. Raskite x reikšmes, su kuriomis trupmena neturi prasmės, ir x reikšmes, su kuriomis trupmenos reikšmė lygi 0.

a) $\frac{x-3}{x}$; b) $\frac{x-1}{x+1}$; c) $\frac{x^2-x}{x^2+x}$; d) $\frac{2x^2+x}{x^2-1}$.

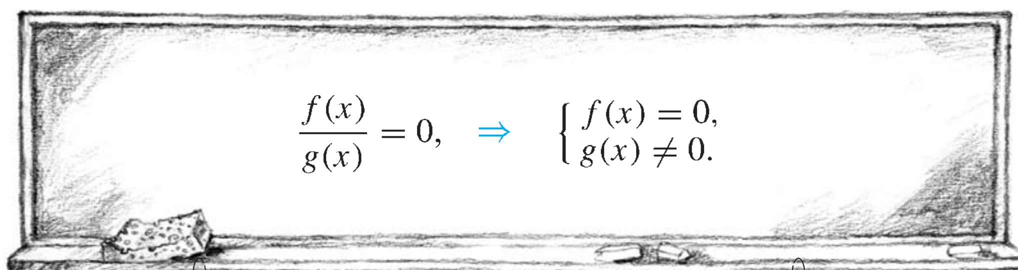
Trupmena $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$:

- neturi prasmės, kai $x^2 + 2x = 0, \Rightarrow x(x+2) = 0, \Rightarrow x = 0, x = -2$;
- lygi 0, kai $x^2 - 4 = 0$, o $x^2 + 2x \neq 0$, t. y.
  $x^2 - 4 = 0, \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0, \Rightarrow x = 2, x = -2$.
  Kai $x = 2$, tai $x^2 + 2x = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8 \neq 0$ ($x = 2$ — tinka).
  Kai $x = -2$, tai $x^2 + 2x = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$ ($x = -2$ — netinka).

Atsakymas. Trupmena $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$ neturi prasmės, kai $x = 0, x = -2$;
lygi 0, kai $x = 2$.

2 užduotis. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{x}{x+3} = 0$; b) $\frac{x+5}{x} = 0$; c) $\frac{x^2+x}{x^2-x} = 0$; d) $\frac{x^2-1}{2x^2+x} = 0$.



Sprendžiant lygtį $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, galima rasti x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$, o tada patikrinti, ar su tomis x reikšmėmis $g(x) \neq 0$.

$f(x)/g(x)=0$

205. Su kuriomis x reikšmėmis trupmena neturi prasmės?

a) $\frac{x}{x-10}$; b) $\frac{2x}{x^2-2x}$; c) $\frac{x-4}{3x^2-12}$; d) $\frac{x+4}{x^2-x-12}$.

206. Su kuriomis x reikšmėmis trupmena lygi 0?

a) $\frac{5x}{x-1}$; b) $\frac{x-7}{x}$; c) $\frac{x^2+6x}{x-6}$; d) $\frac{x^2-7x+10}{x-5}$.

207. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{2x^2-4x}{x-2} = 0$; b) $\frac{x^2-64}{x+8} = 0$; c) $\frac{81-x^2}{x-9} = 0$; d) $\frac{x^2-5x+6}{x-2} = 0$.

Išspręskime lygtį $\frac{x^2-9}{x^2+3x} = 0$.

1) Randame x reikšmes, su kuriomis trupmenos skaitiklis lygus 0:

$x^2 - 9 = 0, \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0, \Rightarrow x - 3 = 0$, arba $x + 3 = 0$,
$\underline{x = 3}$; $\underline{x = -3}$.

2) Patikriname, ar su gautomis x reikšmėmis trupmenos vardiklis nėra lygus 0:

- Kai $x = 3$, tai $x^2 + 3x = 3^2 + 3 \cdot 3 = 18 \neq 0$
  ($x = 3$ — lygčiai tinka).
- Kai $x = -3$, tai $x^2 + 3x = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 9 - 9 = 0$
  ($x = -3$ — lygčiai netinka).

3) Vadinasi, lygtis $\frac{x^2-9}{x^2+3x} = 0$ turi vieną sprendinį $x = 3$.

Atsakymas. $x = 3$.

Lygties sprendimą galima surašyti taip:

$$\frac{x^2-9}{x^2+3x} = 0, \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ x^2 + 3x \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) = 0, \\ x(x+3) \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \ x = -3 \\ x \neq 0, \ x \neq -3; \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

208. Įsitikinkite, kad lygtis sprendinių neturi.

a) $\frac{x+2}{2x+4} = 0$; b) $\frac{x-11}{3x-33} = 0$; c) $\frac{x-14}{x^2-196} = 0$;
d) $\frac{3x+12}{x^2+3x-4} = 0$; e) $\frac{2x-22}{x^2-22x-121} = 0$; f) $\frac{x+20}{x^2+40x+400} = 0$.

209. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{x^2+4x+3}{x+1} = 0$; b) $\frac{x^2-6x+8}{x^2+2x-8} = 0$; c) $\frac{x^2-2x-15}{x^2-3x-18} = 0$;
d) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}} = 0$; e) $\frac{2x^2-10}{x+\sqrt{5}} = 0$; f) $\frac{2x^2+x-1}{3x^2+2x-1} = 0$.

3.2. SPRENDŽIAME SUDĖTINGESNES TRUPMENINES LYGTIS

1 užduotis. Raskite x reikšmes, su kuriomis trupmenos:

a) $\frac{x-3}{x}$ reikšmė lygi 2; b) $\frac{x-1}{x+1}$ reikšmė lygi 3; c) $\frac{2x-1}{x}$ reikšmė lygi -1.

Raskime x reikšmes, su kuriomis trupmenos $\frac{x^2+1}{x+1}$ reikšmė lygi 1.

Sprendžiame lygtį $\frac{x^2+1}{x+1} = 1$:

$\frac{x^2+1}{x+1} = 1, \quad | -1$ ⟵ Dešiniojoje lygties pusėje paliekame tik 0.

$\frac{x^2+1}{x+1} - 1 = 0,$

$\frac{x^2+1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = 0,$ ⟵ Siekiame kairiojoje pusėje gauti trupmeną $\frac{f(x)}{g(x)}$.

$1 = \frac{x+1}{x+1}.$

$\frac{x^2+1-(x+1)}{x+1} = 0,$ Čia skliausti būtina!

$\frac{x^2+1-x-1}{x+1} = 0,$

$\frac{x^2-x}{x+1} = 0, \Rightarrow x^2 - x = 0, \Rightarrow x(x-1) = 0, \Rightarrow \underline{x=0}$ arba $x - 1 = 0,$ $\underline{x = 1}.$

Kai $x = 0$, tai $x + 1 = 0 + 1 \neq 0$ ($x = 0$ yra lygties sprendinys).

Kai $x = 1$, tai $x + 1 = 1 + 1 \neq 0$ ($x = 1$ yra lygties sprendinys).

Atsakymas. $\frac{x^2+1}{x+1} = 1$, kai $x = 0$ ir $x = 1$.

2 užduotis. Išspręskite lygtį. a) $\frac{4}{x} + 2 = 0$; b) $\frac{2}{x-1} - 2 = 0$; c) $\frac{3}{2-x} = -1$.

Spręsdami trupmeninę lygtį, pirmiausia ją pertvarkome į tokią:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Išspręskime lygtį $\frac{14-x}{x+1} = 4$:

$$\frac{14-x}{x+1} - 4 = 0, \Rightarrow \frac{14-x}{x+1} - \frac{4(x+1)}{x+1} = 0, \Rightarrow \frac{14 - x - 4(x+1)}{x+1} = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{14 - x - 4x - 4}{x+1} = 0, \Rightarrow \frac{-5x+10}{x+1} = 0, \Rightarrow -5x + 10 = 0, \Rightarrow x = 2.$$

Kai $x = 2$, tai $x + 1 \neq 0$.

Atsakymas. $x = 2$.

f(x)/g(x)=0

210. Raskite x reikšmes, su kuriomis trupmenos:

a) $\frac{x-5}{x}$ reikšmė lygi 2; b) $\frac{4+3x}{x}$ reikšmė lygi 1;

c) $\frac{2}{x-3}$ reikšmė lygi -5; d) $\frac{x^2+1}{3x-1}$ reikšmė lygi 1.

211. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{9}{2x+1} = 3$; b) $\frac{4+3x}{x} = -1$; c) $\frac{x^2}{x} = 5$; d) $\frac{4}{3x-5} = 6$.

212. Su kuriomis y reikšmėmis trupmenų reikšmės yra lygios?

a) $\frac{4}{y+1}$ ir $\frac{7}{y+4}$; b) $\frac{5}{y-3}$ ir $\frac{2}{y+4}$; c) $\frac{-8}{y-1}$ ir $\frac{4}{y-2}$;

d) $\frac{y}{3}$ ir $\frac{3}{y}$; e) $\frac{4y}{9}$ ir $\frac{1}{4y}$; f) $\frac{2}{y+2}$ ir $-\frac{2}{(y+2)^2}$.

213. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} = 1$; b) $\frac{3}{x+3} + \frac{4}{x} = 1$;

c) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 1$; d) $\frac{21}{x+1} - \frac{16}{x-2} = -1$;

e) $\frac{6}{x-2} - \frac{7}{x+2} - 1 = 0$; f) $\frac{6}{x-3} - \frac{7}{x+3} - 5 = 0$.

Išspręskime lygtį $\frac{4}{x-1} - \frac{5}{x+2} = 1$.

1) Pertvarkome lygtį taip, kad gautume $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$:

$$\frac{4}{x-1} - \frac{5}{x+2} - 1 = 0, \Rightarrow \frac{4(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{5(x-1)}{(x-1)(x+2)} - \frac{1\cdot(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = 0, \Rightarrow$$

$$\frac{4(x+2)-5(x-1)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = 0, \Rightarrow \frac{4x+8-5x+5-(x^2+2x-x-2)}{(x-1)(x+2)}, \Rightarrow$$

$$\frac{4x+8-5x+5-x^2-2x+x+2}{(x-1)(x+2)} = 0, \Rightarrow \frac{-x^2-2x+15}{(x-1)(x+2)} = 0.$$

2) Randame x reikšmes, su kuriomis gautosios trupmenos skaitiklis lygus 0:
$-x^2 - 2x + 15 = 0$, $D = 64$, $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

3) Patikriname, ar su gautomis x reikšmėmis trupmenos vardiklis nelygus 0.
Kai $x = -5$ ir kai $x = 3$, tai $(x-1)(x+2) \neq 0$.

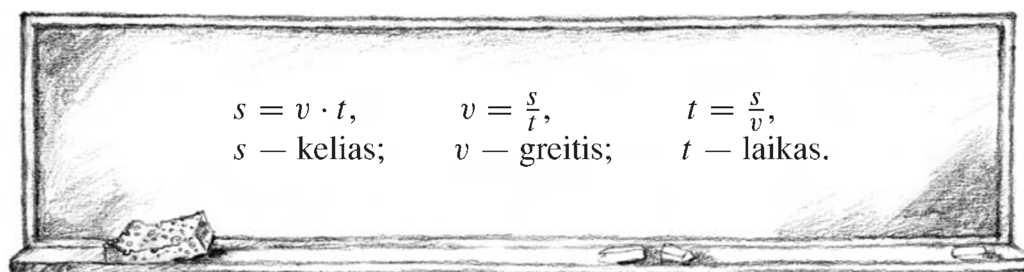
Atsakymas. $x = -5$, $x = 3$.

214. Kam lygios stačiakampio kraštinės (P — stačiakampio perimetras)?

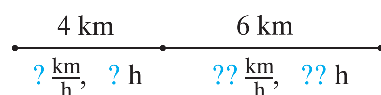
a) $P = 20$ m; kraštinės $\frac{5}{x+1}$ ir $\frac{12}{x}$

b) $P = 16{,}4$ cm; kraštinės $\frac{6}{x+1}$ ir $\frac{7}{x-3}$

3.3. SPRENDŽIAME JUDĖJIMO UŽDAVINIUS



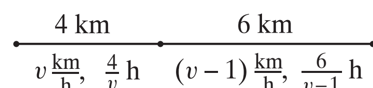
Užduotis. Rita per 4 valandas nuėjo 10 kilometrų. Pirmus 4 kilometrus ji ėjo 1 kilometro per valandą mažesniu greičiu negu paskutinius 6 kilometrus. Kokiu greičiu Rita ėjo paskutinius 6 kilometrus?



? h + ?? h = 4 h

Jonas per 3 valandas nuėjo 10 kilometrų. Pirmus 4 kilometrus jis ėjo 1 kilometro per valandą didesniu greičiu negu paskutinius 6 kilometrus. Kokiu greičiu Jonas ėjo pirmus 4 kilometrus?

1) Jono pirmų 4 kilometrų ėjimo greitį (kilometrais per valandą) pažymėkime v. Užrašykime, kiek laiko (valandomis) Jonas ėjo tuos 4 kilometrus: $\frac{4}{v}$.
2) Užrašykime Jono 6 km ėjimo greitį: $v-1\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. Tuos 6 km jis ėjo $\frac{6}{v-1}$ valandų.



$$\text{Laikas} = \frac{\text{Atstumas}}{\text{Greitis}}$$

3) Kadangi Jonas iš viso ėjo 3 valandas, tai teisinga yra lygybė
$$\frac{4}{v} + \frac{6}{v-1} = 3.$$
4) Išsprendę lygtį, gauname dvi v reikšmes: $v = 4$ ir $v = \frac{1}{3}$.
5) Patikriname, ar gautieji lygties sprendiniai tenkina *uždavinio sąlygą*:
   - Kai $v = 4$, tai gauname $\frac{4}{4} + \frac{6}{3} = 3$.
   - Kai $v = \frac{1}{3}$, tai gauname, kad 6 kilometrus Jonas ėjo $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ greičiu, ko būti negalėjo. Vadinasi, lygties sprendinys $v = \frac{1}{3}$ netinka!

Atsakymas. $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

215. Autobùsas, važiuodamas pastoviu greičiu, nuvažiavo 120 km. Jei jis būtų važiavęs 12 km/h didesniu greičiu, tai kelyje būtų užtrukęs 20 minučių mažiau. Kokiu greičiu važiavo autobusas?

1) Autobuso važiavimo greitį pažymėkime $v\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.
2) 120 kilometrų autobusas nuvažiavo per $\frac{120}{v}$ valandų.
3) Jei autobuso greitis būtų $12\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ didesnis, tai jis tada būtų lygus $v+12\ \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, o kelyje autobusas būtų užtrukęs $\frac{120}{v+12}$ valandų.
4) 20 minučių paverčiame valandomis (tai būtina!) ir sudarome lygtį:
$$20\ \text{min} = \frac{20}{60}\ \text{h} = \frac{1}{3}\ \text{h};$$
$$\frac{120}{v} - \frac{120}{v+12} = \frac{1}{3}.$$
5) Išspręskite šią trupmeninę lygtį.
6) Patikrinkite, ar gautieji lygties sprendiniai tenkina *uždavinio sąlygą*, ir parašykite atsakymą.

216. Tarp miestų A ir B yra 1600 km. Lėktuvas iš A į B skrido 80 km/h didesniu greičiu negu atgal iš B į A. Iš A į B lėktuvas nuskrido 1 valanda greičiau negu iš B į A. Kokiu greičiu lėktuvas skrido iš A į B ir kokiu greičiu jis skrido iš B į A?

217. Valtis per 7 valandas nuplaukė 20 kilometrų pasroviui ir tiek pat prieš srovę. Upės tėkmės greitis yra 3 km/h. Raskite valties greitį stovinčiame vandenyje.

Sąlyga. Valtis nuplaukė 8 km pasroviui ir 6 km prieš srovę. Visoje kelionėje ji sugaišo 4 h. Upės tėkmės greitis lygus 3 km/h. Koks yra valties greitis stovinčiame vandenyje?

Sprendimas.

	Pasroviui	Prieš srovę
Kelias (km)	8	6
Greitis $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	$x+3$	$x-3$
Laikas (h)	$\frac{8}{x+3}$	$\frac{6}{x-3}$

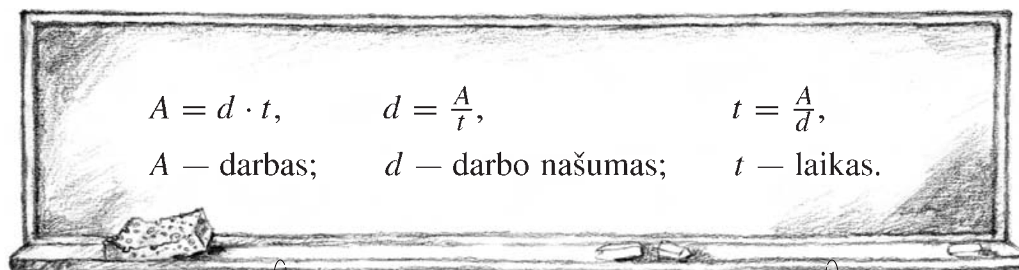
Iš viso valtis plaukė:

$$\frac{8}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 4, \Rightarrow \frac{8\cdot(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{6\cdot(x+3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{4(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = 0, \Rightarrow$$
$$\frac{8x-24+6x+18-4x^2+36}{(x+3)(x-3)} = 0, \Rightarrow \frac{-4x^2+14x+30}{(x+3)(x-3)} = 0, \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 5,\ x = -\frac{3}{2}\ \text{(netinka)}.$$

Atsakymas. $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

218. Valtis nuplaukė 12 km pasroviui ir tiek pat prieš srovę. Iš viso kelionėje valtis užtruko 1 h 40 min. Raskite srovės greitį, jei valties greitis stovinčiame vandenyje lygus 15 km/h.

3.4. SPRENDŽIAME DARBO UŽDAVINIUS



Jei darbininkas per 1 valandą pagamina 5 detales, tai per 3 valandas pagamins 15 detalių:
$d = 5$ detalės per valandą (darbo našumas),
$t = 3$ valandos (darbo laikas),
$A = d \cdot t = 5 \cdot 3 = 15$ detalių (darbas).

Užduotis. Mama su Monika, dirbdamos kartu, pasodino gėles per 4 valandas. Jei mama gėles būtų sodinusi viena, tai būtų užtrukusi 6 valandomis trumpiau, negu būtų užtrukusi Monika, tas gėles sodindama viena. Per kiek valandų tas gėles pasodintų Monika, dirbdama viena?

1) Tarkime, kad viena Monika gėles pasodintų per x valandų.
Tada mama, dirbdama viena, užtruktų

$x - \ldots$ valandas.

2) Užrašykime, kurią darbo dalį per 1 valandą padaro Monika:

$\frac{1}{x}$.

Vienetas žymi visą darbą.

Monika: per 1 valandą padaro $\frac{1}{x}$ darbo dalį;
per 2 valandas padaro $\frac{2}{x}$ darbo dalį;
per x valandų padaro $\frac{x}{x} = 1$ darbo dalį, t. y. visą darbą.

3) Užrašykime, kurią darbo dalį per 1 valandą padaro mama:

$\frac{1}{x-\ldots}$.

4) Užrašykime, kurią darbo dalį per 1 valandą padaro mama su Monika, dirbdamos kartu:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\ldots}$.

5) Visą darbą ($=1$) Monika su mama padaro per 4 h. Vadinasi,

$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\ldots}\right) \cdot 4 = 1.$

Išspręskite gautąją lygtį.

219. Atsukus čiaupą, baseinas pripildomas per 15 valandų. Kuri baseino dalis bus pripildyta per 1 h? 5 h? 15 h?

220. Meistras turi pagaminti 120 detalių. Kurią darbo dalį jis jau atliko, jei pagamino 20 detalių? 60 detalių? 120 detalių?

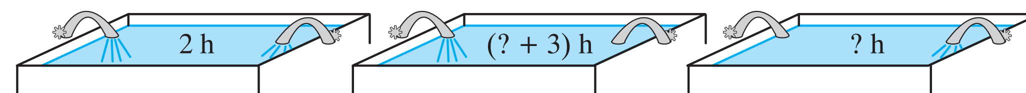
221. Tėvas nudažo sieną 5 valandomis greičiau negu sūnus. Dirbdami kartu, jie tą sieną nudažo per 6 h. Per kiek valandų, dirbdamas vienas, tą sieną nudažo tėvas?

Sakykime, kad tėvas, dirbdamas vienas, sieną nudažo per x valandų.

	Tėvas	Sūnus
Laikas (h), per kurį nudažo visą sieną	x	$x+5$
Per 1 h nudažoma sienos dalis lygi	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+5}$
Per 6 h nudažoma sienos dalis lygi	$\frac{6}{x}$	$\frac{6}{x+5}$

222. Dvi brigados, dirbdamos kartu, kelią gali suremontuoti per 6 h. Per kiek laiko šį kelią suremontuotų kiekviena brigada, dirbdama atskirai, jei pirmoji brigada tą darbą atliktų 16 h greičiau negu antroji?

223. Atsukus du čiaupus, baseinas pripildomas vandens per 2 h. Pirmuoju čiaupu baseinas pildomas 3 valandomis ilgiau negu antruoju. Per kiek valandų baseinas pripildomas antruoju čiaupu?



224. Tėvas griovį gali iškasti per 8 h, o sūnus — per 12 h. Per kiek laiko tą griovį gali iškasti tėvas su sūnumi, dirbdami kartu?

225. Du ekskavatoriai duobę iškasė per 12 dienų. Pirmasis ekskavatorius dirbo $1\frac{1}{2}$ karto didesniu našumu negu antrasis. Per kiek dienų tą duobę būtų iškasęs antrasis ekskavatorius, dirbdamas vienas?

226. Du staliai pagamino po 24 kėdes. Pirmasis stalius per dieną pagamindavo 2 kėdėmis daugiau negu antrasis. Kiek kėdžių per dieną pagamindavo pirmasis stalius, jei jis kėdes gamino 1 diena mažiau negu antrasis?

227. Tėtis su mama, dirbdami kartu, kambarį gali išklijuoti tapetais per 3 h 45 min. Tėtis vienas šį darbą atliktų 4 valandomis greičiau negu viena mama. Per kiek valandų kambarį tapetais išklijuotų tėtis, dirbdamas vienas?

3.5. LYGČIŲ SISTEMOS, KURIŲ TIK VIENA LYGTIS YRA TIESINĖ

Užduotis. Sudėję du skaičius, gauname 15, o sudėję tiems skaičiams atvirkštinius skaičius, gauname $\frac{5}{18}$. Raskime tuos skaičius.

1) Vieną skaičių pažymėkite x, kitą — y. Užrašykite, kam lygi jų suma:

$x + y = \ldots \longleftarrow$ Lygtis su dviem nežinomaisiais (tiesinė). Ši lygtis vadinama *tiesinė*, nes jos grafikas yra tiesė.

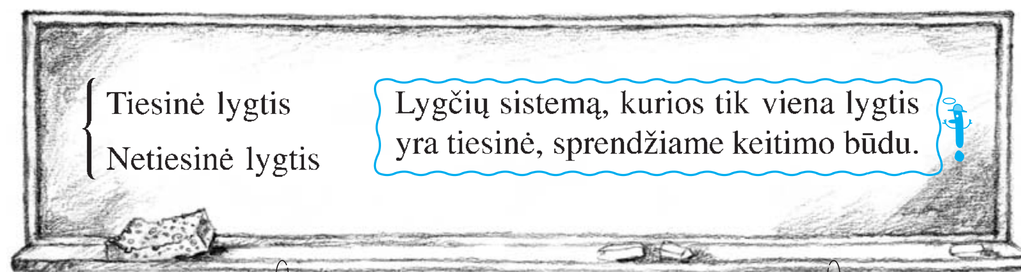
2) Užrašykite skaičiams x ir y atvirkštinius skaičius.

Skaičiai a ir $\frac{1}{a}$ vadinami vienas kitam atvirkštiniais.

Užrašykite, kam lygi tų skaičių suma:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \ldots \longleftarrow$ Lygtis su dviem nežinomaisiais (netiesinė). Šios lygties grafikas nėra tiesė, todėl lygtis vadinama *netiesinė*.

3) Užrašykite dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, atitinkančią aprašytą situaciją.
4) Iš tiesinės lygties išsireikškite kurį nors nežinomąjį ir išspręskite tą sistemą keitimo būdu.



$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ (2+y)^2 - y^2 = 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ 4 + 4y + y^2 - y^2 = 8; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ y = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

Atsakymas. (3; 1).

228. Išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} y - 2x = 0, \\ x^2 + y^2 = 10y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8x, \\ y = 3x; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 + 5y, \\ 2xy - y = 7; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - 2x = -5, \\ y^2 + 4x = 10; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - 2xy = 7, \\ x - 3y = 2; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5xy - x^2 = 9, \\ 2y - x = 3. \end{cases}$

Išspręskime lygčių sistemą $\begin{cases} x + 2y = 1, & (1) \\ x^2 - y^2 = 8. & (2) \end{cases}$

Iš sistemos (1) lygties išsireikškime x ir gautą išraišką įrašykime į (2) lygtį:

$$\begin{cases} x = 1 - 2y, \\ (1 - 2y)^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

Išspręskime gautą lygtį su vienu nežinomuoju:

$(1 - 2y)^2 - y^2 = 8, \Rightarrow 1 - 4y + 4y^2 - y^2 = 8, \Rightarrow$
$3y^2 - 4y - 7 = 0, \Rightarrow D = 100, \Rightarrow$

$y_1 = \frac{4-\sqrt{100}}{2\cdot 3} = \frac{4-10}{6} = \frac{-6}{6} = -1, \quad y_2 = \frac{4+\sqrt{100}}{2\cdot 3} = \frac{4+10}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$

Apskaičiuokime atitinkamas x reikšmes:

- Kai $y_1 = -1$, tai $x_1 = 1 - 2y = 1 - 2\cdot(-1) = 1 + 2 = 3$.
- Kai $y_2 = \frac{7}{3}$, tai $x_2 = 1 - 2y = 1 - 2\cdot\frac{7}{3} = -\frac{11}{3}$.

Atsakymas. $(3; -1)$, $\left(-\frac{11}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

229. Vieną nežinomą skaičių pažymėkite x, kitą — y. Tada pagal uždavinio sąlygą sudarykite dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais (x ir y) sistemą. Išsprendę sistemą, apskaičiuokite x ir y reikšmes.

a) Kokių dviejų skaičių suma lygi 25, o jų sandauga lygi 100?
b) Raskite du skaičius, kurių skirtumas lygus 22, o sandauga lygi 23.
c) Kokių dviejų skaičių suma lygi 10, o jų kvadratų suma lygi 212?
d) Raskite du skaičius, kurių skirtumas lygus 5, o jų kvadratų suma lygi 125.
e) Kokių dviejų skaičių suma lygi 12, o jiems atvirkštinių skaičių suma lygi $\frac{3}{8}$?
f) Raskite du skaičius, kurių skirtumas lygus 1, o jiems atvirkštinių skaičių suma lygi $\frac{9}{20}$.

230. Apskaičiuokite stačiojo trikampio statinių ilgius, jei jo:

a) perimetras lygus 48 cm, o įžambinė lygi 20 cm;
b) perimetras lygus 60 cm, o įžambinė lygi 25 cm.

APIBENDRINAME

Trupmeninės lygtys

Lygtìs, kurios nežinomasis yra trupmenos vardiklyje, vadinama *trupmeninė lygtimì*.

Spręsdami trupmeninę lygtį:

1) parašome ją kaip $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
2) randame nežinomojo (x) reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$;
3) patikriname, ar su gautosiomis x reikšmėmis $g(x) \neq 0$. Jei yra x reikšmių, su kuriomis $g(x) = 0$, tai jas atmetame;
4) parašome atsakymą.

$\frac{2}{x(2-x)} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{4}$;

$\frac{2}{x(2-x)} - \frac{1}{2-x} - \frac{1}{4} = 0$;

$\frac{8-4x-x(2-x)}{4x(2-x)} = 0$;

$8 - 4x - 2x + x^2 = 0$;

$x^2 - 6x + 8 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Kai $x = 2$, tai $4x(2-x) = 0$.

Kai $x = 4$, tai $4x(2-x) \neq 0$.

$x = 2$ netinka.

Atsakymas. $x = 4$.

Judėjimo uždaviniai

Sprendžiant judėjimo uždavinius, praverčia kelio formulė:

$s = v \cdot t$;

s — kelias, v — greitis, t — laikas.

Iš formulės gauname: $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$.

Važiuojant $v = 10$ kilometrų per valandą greičiu, per $t = 3$ valandas nuvažiuojama $s = v \cdot t = 10 \cdot 3 = 30$ kilometrų.

Plaukiant upe pasroviui ar skrendant pavėjui, greitis žemės atžvilgiu

$v_{pa} = v_{savasis} + v_{upės(vėjo)}$.

Plaukiant upe prieš srovę ar skrendant prieš vėją, greitis žemės atžvilgiu

$v_{pr} = v_{savasis} - v_{upės(vėjo)}$.

Jei valties savasis greitis lygus 10 km/h, o upės tėkmės greitis — 2 km/h, tai greitis:

- pasroviui $v = 10 + 2 = 12$ km/h;
- prieš srovę $v = 10 - 2 = 8$ km/h.

Darbo uždaviniai

Sprendžiant darbo uždavinius, praverčia darbo formulė:

$A = d \cdot t$;

A — darbas, d — našumas, t — laikas.

Iš formulės gauname: $d = \frac{A}{t}$, $t = \frac{A}{d}$.

Gaminant $d = 10$ detalių per valandą ir dirbant $t = 3$ valandas, bus pagaminta $A = d \cdot t = 10 \cdot 3 = 30$ detalių.

Lygčių sistemos, kurių tik viena lygtis tiesinė

Spręsdami dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, kurios tik viena lygtis yra tiesinė, t. y.

$ax + by = c$ (a, b ir c — skaičiai),

iš tos lygties išsireiškiame kurį nors nežinomąjį ir tą išraišką įrašome į kitą sistemos lygtį. Taigi lygčių sistemą sprendžiame keitimo būdu.

$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 100; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 + y, \\ (2+y)^2 + y^2 = 100; \end{cases}$

$y^2 + 2y - 48 = 0$,

$y_1 = -8$, $y_2 = 6$;

$x_1 = -6$, $x_2 = 8$.

Atsakymas. $(-6; -8)$, $(8; 6)$.

Aukso skaičius

Užduokime tokį iš pirmo žvilgsnio keistoką ***klausimą***:

Kurioje vietoje reikia laužti strypelį, kad didesnioji dalis, palyginti su mažesniąja dalimi, nebūtų per daug didelė, o palyginti su visu strypeliu, nebūtų per daug maža?



d — didesniosios dalies ilgis
m — mažesniosios dalies ilgis
Laužimo vieta

Natūralu laužti taip, kad, didesniosios dalies ilgį d padaliję iš mažesniosios dalies ilgio m, gautume tą patį, ką ir visos lazdelės ilgį $d + m$ padaliję iš didesniosios dalies ilgio d, t. y.

$$\frac{d}{m} = \frac{d+m}{d}.$$

$\frac{\text{Visa lazdelė}}{\text{Didesnioji dalis}} = \frac{\text{Didesnioji dalis}}{\text{Mažesnioji dalis}}$

Pertvarkykime šią lygybę:

$$\frac{d}{m} = \frac{d}{d} + \frac{m}{d}, \quad \frac{d}{m} = 1 + \frac{m}{d}.$$

Pažymėkime $\frac{d}{m} = x$, tada $\frac{m}{d} = \frac{1}{x}$. Gauname lygtį

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

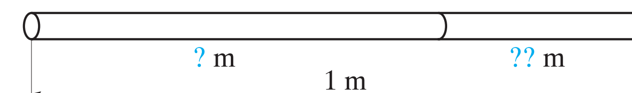
1 užduotis. Išspręskite šią lygtį. Įsitikinkite, kad

$$\frac{d}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6.$$

Skaičius $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ yra iracionalus.
Jis vadinamas aukso pjūviu.
Apytikslė to skaičiaus reikšmė lygi 1,6.

Atsakymas į klausimą. Strypelį reikia laužti toje vietoje, kad didesnioji dalis būtų maždaug 1,6 karto ilgesnė už mažesniąją dalį.

2 užduotis. Kur reikia laužti strypelį, kurio ilgis lygus 1 m?



SPRENDŽIAME

231. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{2x-8}{x^2-16}=0$; b) $\frac{0{,}5x^2+x}{0{,}25x^2-1}=0$; c) $\frac{3x+6}{4x^2+4x+1}=0$;

d) $\frac{x^2-x-30}{x^2+x-30}=0$; e) $\frac{x+25}{x^2-625}=0$; f) $\frac{2x^2-7x+3}{2x^2-3x-2}=0$;

g) $x-\frac{14-3x}{x+2}=0$; h) $\frac{12}{7-x}-x=0$; i) $\frac{3}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$;

j) $\frac{x}{x-4}+\frac{1}{x+4}=\frac{80}{x^2-16}$; k) $\frac{7x}{18}=\frac{2}{7x}$; l) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x-3}+\frac{4}{x^2-2x-3}=0$.

232. a) Trupmenos vardiklis 4 vienetais didesnis už jos skaitiklį. Jei tos trupmenos ir skaitiklį, ir vardiklį padidintume vienetu, tai gautume trupmeną, kuri lygi $\frac{1}{2}$. Raskite pradinę trupmeną.

b) Trupmenos skaitiklis vienetu didesnis už vardiklį. Prie skaitiklio pridėję 3, o prie vardiklio pridėję 18, gauname trupmeną, kuri yra vienetu mažesnė už pradinę trupmeną. Kokia yra pradinė trupmena?

c) Trupmenos vardiklis yra 5 vienetais didesnis už skaitiklį. Jei prie skaitiklio pridėsime 14, o iš vardiklio atimsime 1, tai gausime trupmeną, atvirkščią duotajai. Kokia yra duotoji trupmena?

233. Per 8 valandas valtis nuplaukė 22,5 km prieš srovę ir 28,5 km pasroviui. Upės tėkmės greitis lygus 2,5 km/h. Koks yra valties savasis greitis?

234. Atstumas tarp upėje esančių prieplaukų A ir B lygus 80 km. Garlaivis maršrutą ABA nuplaukė per 8 h 20 min. Upės tėkmės greitis lygus 4 km/h. Koks yra garlaivio greitis stovinčiame vandenyje?

235. Motorinė valtis nuplaukė 46 km upe pasroviui ir 10 km ežeru per 2 h 30 min. Koks yra valties savasis greitis, jei upės tėkmės greitis lygus 3 km/h?

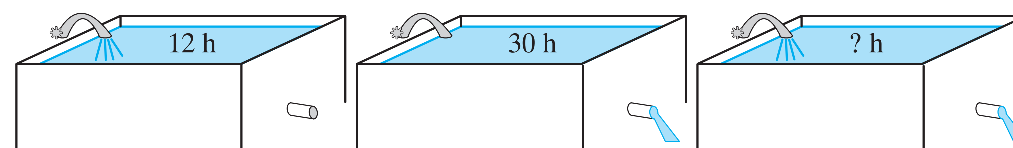
236. Kateris, plaukdamas upe 12 km prieš srovę ir 5 km pasroviui, sugaišo tiek laiko, kiek būtų reikėję nuplaukti ežere 18 km. Koks yra katerio greitis ežere, jei upės tėkmės greitis lygus 3 km/h?

237. Žvejys iš prieplaukos išplaukė valtimi prieš srovę. Nuplaukęs 9 km, jis nustojo irkluoti ir pradėjo žvejoti. Praėjus 8 valandoms nuo išplaukimo momento, srovė valtį atnešė atgal į prieplauką. Koks yra upės tėkmės greitis, jei valties savasis greitis lygus 6 km/h?

238. Automobilis nuvažiavo 160 km. Jei jo greitis būtų buvęs 20 km/h mažesnis, tai kelyje jis būtų užtrukęs 40 min ilgiau. Kokiu greičiu važiavo automobilis?

239. Šiandien traukinys 720 km atstumą važiavo 10 km/h didesniu greičiu negu vakar, todėl tą atstumą jis įveikė 1 valanda greičiau. Kokiu greičiu traukinys važiavo vakar?

240. Baseinas įtekamuoju vamzdžiu pripildomas per 12 h. Pripildytas baseinas ištekamuoju vamzdžiu ištuštinamas per 30 h. Esant tuščiam baseinui, abu vamzdžiai (įtekamasis ir ištekamasis) buvo atidaryti vienu metu. Per kiek laiko baseinas prisipildys vandens?



241. Trys darbininkai, dirbdami kartu, išmūrija sieną per 20 valandų. Pirmasis darbininkas, dirbdamas vienas, mūrytų tą sieną 19 valandų ilgiau negu antrasis darbininkas, o antrasis mūrytų du kartus ilgiau, negu trečiasis darbininkas, dirbdamas vienas. Per kiek laiko tą sieną išmūrytų kiekvienas darbininkas, dirbdamas vienas?

242. Išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2-xy=y^2-19; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=37+xy, \\ x+3=y; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=5, \\ x^2-3xy=y^2+13; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2-2xy=5y-44. \end{cases}$

243. Raskite du skaičius, kurių:
a) suma lygi 29, o sandauga lygi 180;
b) suma lygi 3, o kvadratų suma lygi 89;
c) suma lygi 10, o jiems atvirkštinių skaičių suma lygi $\frac{5}{12}$.

244. a) Raskite stačiakampio kraštinių ilgius, jei viena jo kraštinė 14 cm ilgesnė už kitą, o įstrižainė lygi 26 cm.

b) Stačiakampio sklypo plotas lygus 24 arams, o jį juosiančios tvoros ilgis lygus 200 m. Koks yra sklypo ilgis ir plotis?

Stačiakampio kraštinių ilgius pažymėkite a ir b.
Sudarykite dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą.

245. Darbininkas ir jo mokinys, dirbdami kartu, baseiną gali išvalyti per 12 dienų. Aštuonias dienas baseiną jie valė kartu. Tada mokinys susirgo, o baseiną valyti baigė vienas darbininkas. Tam prireikė 5 dienų. Per kiek dienų darbininkas išvalytų baseiną, dirbdamas vienas?



246. Ignas turėjo 3 vienodo ilgio pagaliukus. Vieną pagaliuką jis patrumpino 1 cm, o kitus du — po 2 cm. Iš gautų pagaliukų Ignas sudėjo trikampį. Pasirodo, kad gautasis Igno trikampis — statusis. Koks yra to trikampio perimetras ir plotas?

Trupmeninę lygtį sprendžiame kitaip

Trupmeninę lygtį galima spręsti abi lygties puses dauginant iš lygtį sudarančių trupmenų bendrojo vardiklio, t. y. trupmeninę lygtį keičiant sveikąja lygtimi.

Pavyzdžiui:

$x = 1 + \frac{1}{x}$, $\quad | \cdot x \ (x \neq 0)$ ⟵ Abi lygties puses padauginę iš x, gauname lygtį be vardiklio.

$x \cdot x = 1 \cdot x + \frac{1}{x} \cdot x$,

$x^2 = x + 1$, ⟵ Gavome kvadratinę lygtį.

$x^2 - x - 1 = 0$,

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$,

$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Patikriname, ar gautosios x reikšmės nepadaro pradinės lygties trupmenų vardiklių lygių 0.

Iš tikrųjų nei su x_1, nei su x_2 duotosios lygties trupmenos $\frac{1}{x}$ vardiklis $x \neq 0$.

Atsakymas. $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

247. Išspręskite trupmeninę lygtį abi jos puses daugindami iš lygties trupmenų bendrojo vardiklio.

a) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-2} = 3$; b) $\frac{x-1}{2x} + \frac{3}{x+1} = -5$; c) $\frac{3x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = 0$.

Išspręskime lygtį. a) $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$; b) $\frac{3y-2}{y} - \frac{1}{y-2} = \frac{3y+4}{y(y-2)}$.

a) Abi lygties puses dauginame iš lygties trupmenų bendrojo vardiklio:

$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$, $\quad | \cdot x(x+1)$

$x + 1 = 2x$,

$x = 1$.

Kai $x = 1$, tai $x \neq 0$ ir $x + 1 \neq 0$.

Atsakymas. $x = 1$.

b) $\frac{3y-2}{y} - \frac{1}{y-2} = \frac{3y+4}{y(y-2)}$, $\quad | \cdot y(y-2)$

$(3y-2) \cdot (y-2) - 1 \cdot y = 3y + 4$,

$3y^2 - 12y = 0$,

$3y(y-4) = 0$, $\Rightarrow y_1 = 0$ ir $y_2 = 4$.

Gautoji $y_1 = 0$ reikšmė lygčiai netinka, nes lygties trupmenos $\frac{3y-2}{y}$ vardiklis virsta nuliu.

Lygties nežinomojo reikšmė $y_2 = 4$ lygčiai tinka, nes lygties trupmenų vardikliai su ta reikšme nelygūs 0, t. y. $y(y-2) \neq 0$, kai $y = 4$.

Atsakymas. $y = 4$.

Lygtys su moduliais

248. Užrašykite reiškinį be modulio ženklo.

a) $|x| + 2$, kai $x \geqslant 0$; b) $5 - |x|$, kai $x < 0$; c) $|x - 1|$, kai $x \geqslant 1$;

d) $|3 + x|$, kai $x < -3$; e) $|x| - 2x + 3$, kai $x \geqslant 0$; f) $|x + 5| + 7$, kai $x \geqslant -5$;

g) $8 - |x - 5|$, kai $x < 5$; h) $3x - |3x + 2|$, kai $x \geqslant -\frac{2}{3}$; i) $|2x - 5| + 2x$, kai $x < 2{,}5$.

Prisiminkime modulio apibrėžimą:

$|x| = x$, kai $x \geqslant 0$,

$|x| = -x$, kai $x < 0$.

Kai $2x - 6 \geqslant 0$, t. y. kai $x \geqslant 3$, tai $|2x - 6| = 2x - 6$.

Kai $2x - 6 < 0$, t. y. kai $x < 3$, tai $|2x - 6| = -(2x - 6) = -2x + 6$.

249. Išspręskite lygtį.

a) $|x| = 7$; b) $|x + 3| = 2$; c) $|x - 4| = 3$;

d) $|5 - x| = 1$; e) $|x + 1| = 0$; f) $|-x - 1| = 6$;

g) $|2x - 7| = 4$; h) $|3 - 5x| = 1$; i) $|-3x - 1| = 0$;

j) $|5 - x| - 3 = 0$; k) $6 - |2x + 3| = 1$; l) $4x = |-3 - x| + 7$.

Išspręskime lygtį $|x + 2| = 5$.

I būdas.

$|x + 2| = 5$ $\quad |-5| = 5$, $|5| = 5$

Lygties sprendiniai yra tie skaičiai, su kuriais:

1) $x + 2 = 5$, $\quad x = 3$; 2) $x + 2 = -5$, $\quad x = -7$.

II būdas.

$|x+2| = 5$ $\quad$ Kai $x + 2 \geqslant 0$, tai $|x + 2| = x + 2$. Kai $x + 2 < 0$, tai $|x + 2| = -x - 2$.

Lygties sprendinius randame išsprendę dvi sistemas:

1) $\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x + 2 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x = 3; \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 3}$.

2) $\begin{cases} x + 2 < 0, \\ -x - 2 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x = -7; \end{cases} \Rightarrow \underline{x = -7}$.

Atsakymas. -7; 3.

250. Išspręskite trupmeninę lygtį.

a) $\frac{1}{|x|} = 1$; b) $\frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{5}$; c) $-\frac{1}{|2x+1|} = 5$;

d) $\frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{x}$; e) $\frac{|x|}{3x+10} = \frac{1}{|x|}$; f) $\frac{|x-1|}{|2-x|} = x$.

TESTAS

251. Su kuriomis kintamojo x reikšmėmis trupmena neturi prasmės?

a) $\frac{3x}{x-1}$ **A** 3 **B** 1 **C** 0 **D** -1

b) $\frac{2x-1}{3x+1}$ **A** $\frac{1}{3}$ **B** $-\frac{1}{3}$ **C** $-\frac{1}{2}$ **D** 0

c) $\frac{x-1}{x^2+x}$ **A** 0 **B** 1 **C** -1 **D** 0 ir -1

d) $\frac{5-x}{x^2-2x+1}$ **A** 1 **B** 5 **C** 5 ir 1 **D** -1 ir 5

e) $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ **A** 1 ir -1 **B** 2 ir -2 **C** 1 ir 2 **D** 1, -1, 2 ir -2

f) $\frac{x}{5-x^2}$ **A** 0 **B** $\sqrt{5}$ **C** 0 ir $\sqrt{5}$ **D** $-\sqrt{5}$ ir $\sqrt{5}$

252. Su kuriomis kintamojo x reikšmėmis trupmenos reikšmė lygi 0?

a) $\frac{3x}{x-1}$ **A** 0 **B** 1 **C** $\frac{1}{3}$ **D** $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{x-15}{14+x}$ **A** -14 **B** 15 **C** 15 ir -14 **D** 14 ir -15

c) $\frac{x^2-3x}{x-1}$ **A** 0 ir 1 **B** 0 ir -1 **C** 0 ir 3 **D** 0 ir -3

d) $\frac{x^2-9}{x+1}$ **A** 0 ir -1 **B** -3 ir 3 **C** -1 ir 3 **D** 0 ir 3

e) $\frac{x^2-2}{x}$ **A** $\sqrt{2}$ ir $-\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{2}$ ir 0 **C** 0 **D** $-\sqrt{2}$, 0 ir $\sqrt{2}$

f) $\frac{x^2+x-6}{x-3}$ **A** 3 ir 2 **B** -3 ir -2 **C** -3 ir 3 **D** -3 ir 2

253. Kurie skaičiai yra lygties sprendiniai?

a) $\frac{x(x+7)}{x^2-49}=0$ **A** 0 **B** 0 ir -7 **C** -7 ir 7 **D** 0 ir 7

b) $\frac{x-1}{x}=2$ **A** 1 **B** $-\frac{1}{3}$ **C** -1 **D** $\frac{1}{3}$

c) $\frac{x+2}{x}=x$ **A** -2 ir -1 **B** -2 ir 1 **C** 2 ir 1 **D** 2 ir -1

d) $\frac{x}{4}=\frac{4}{x}$ **A** 1 ir -1 **B** 2 ir -2 **C** 3 ir -3 **D** 4 ir -4

e) $\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x-2}$ **A** 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

f) $\frac{x^2-4}{x+2}=1$ **A** 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

g) $\frac{x}{x+10}=2$ **A** 10 **B** -20 **C** -10 **D** 0

254. Kuri lygtis neturi sprendinių?

a) $\frac{x+2}{x}=0$; b) $\frac{(x-3)^2}{x-3}=0$; c) $\frac{x+1}{x-1}=0$; d) $\frac{x}{x-1}=0$.

A a) **B** b) **C** c) **D** d)

$f(x)/g(x)=0$

255. Per 2 h automobilis nuvažiavo 142 km. Kiek kilometrų jis nuvažiuos per 3 h, važiuodamas tokiu pat greičiu?

A 426 km **B** 213 km **C** 710 km **D** 206 km

256. Valties greitis stovinčiame vandenyje yra 12 km/h. Kokį atstumą per 3 h nuplauks valtis, plaukdama pasroviui, jei srovės greitis lygus 4 km/h?

A 36 km **B** 24 km **C** 38 km **D** 48 km

257. Valties greitis stovinčiame vandenyje yra 20 km/h. Kokį atstumą per 5 h nuplauks valtis, plaukdama upe prieš srovę, jei srovės greitis lygus 3 km/h?

A 100 km **B** 115 km **C** 85 km **D** 75 km

258. Valties greitis pasroviui yra 20 km/h, o prieš srovę — 16 km/h. Srovės greitis lygus:

A 1 km/h **B** 2 km/h **C** 3 km/h **D** 4 km/h

259. Jei žmogus eitų pavėjui, tai per 1 valandą jis nueitų 6 km, o jei jis eitų prieš vėją, tai nueitų 4 km. Kiek kilometrų nueitų žmogus per 2 h, jei nebūtų vėjo?

A 10 km **B** 12 km **C** 8 km **D** 4 km

260. Per tris valandas automatas pagamina 225 detales. Reikia pagaminti 1000 detalių. Kiek dar detalių turi pagaminti automatas, jei jis jau dirbo 8 valandas?

A 600 **B** 800 **C** 675 **D** 400

261. Kai vienu metu atsukti 5 vienodi čiaupai, tai baseinas pripildomas per 42 min. Per kiek laiko baseinas pripildomas 6 tokiais čiaupais?

A 35 min **B** 30 min **C** 50,4 min **D** 20 min

262. Trejomis vienodomis staklėmis užduotis atliekama per 6 h. Per kiek laiko ta užduotis atliekama dvejomis tokiomis staklėmis?

A 8 h **B** 5 h **C** 2 h **D** 9 h

263. Kokių dviejų skaičių suma lygi 8, o jų sandauga lygi 15?

A 4 ir 2 **B** 16 ir -2 **C** -3 ir -5 **D** 3 ir 5

264. Kokių dviejų skaičių skirtumas lygus 7, o jų sandauga lygi -6?

A -6 ir -1 **B** 1 ir -6 **C** -1 ir 6 **D** 1 ir 6

265. Lygčių sistemos $\begin{cases} y-2x=0, \\ x^2+y=8 \end{cases}$ sprendiniai yra:

A (2; 4), (4; 8) **B** (-2; -4), (-4; -8) **C** (2; 4), (-4; -8) **D** (0; 0), (0; 8)

266. Lygčių sistemos $\begin{cases} x\cdot y=2, \\ x+y=3 \end{cases}$ sprendiniai yra:

A (-2; -1), (2; 1) **B** (2; 1), (-1; 3) **C** (2; 1), (1; 2) **D** $\left(4; \frac{1}{2}\right)$, (2; 3)

PASITIKRINAME

267. Su kuria x reikšme trupmena neturi prasmės?

a) $\frac{7x}{x-7}$; b) $\frac{x+9}{x}$; c) $\frac{x+6}{x^2-36}$; d) $\frac{x-4}{x^2-8x+12}$.

268. Su kuria x reikšme trupmenos reikšmė lygi 0?

a) $\frac{8x}{x+8}$; b) $\frac{x-15}{15x}$; c) $\frac{x^2-81}{x+9}$; d) $\frac{x^2-10x+25}{x+1}$.

269. Su kuriomis x reikšmėmis trupmenos reikšmė lygi 1?

a) $\frac{x-3}{2x}$; b) $\frac{x+12}{3x}$; c) $\frac{x^2-25}{x+5}$; d) $\frac{x^2-12x+36}{x^2}$.

270. Įsitikinkite, kad lygtis sprendinių neturi.

a) $\frac{x}{x(x+1)}=0$; b) $\frac{x-6}{2x-12}=0$; c) $\frac{x+7}{x^2-49}=0$; d) $\frac{x-5}{x^2-10x+25}=0$.

271. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{10x}{x+10}=0$; b) $\frac{x-10}{10x}=0$; c) $\frac{x^2-144}{2x+24}=0$; d) $\frac{x^2-3x-10}{x-5}=0$;

e) $\frac{x-5}{x}=6$; f) $\frac{2x+6}{x}=3$; g) $\frac{5x-2}{x}=6$; h) $\frac{8}{x-3}=2$;

i) $\frac{1}{x}=\frac{x}{1}$; j) $\frac{2}{x}=\frac{x}{2}$; k) $\frac{x}{x-1}=x$; l) $\frac{5x}{2x-1}=4x$.

272. Su kuriomis x reikšmėmis trupmenų reikšmės yra lygios?

a) $\frac{2}{x-1}$ ir $\frac{1}{x+2}$; b) $\frac{7}{x-6}$ ir $\frac{6}{x-7}$; c) $\frac{10}{3x+2}$ ir $\frac{5}{x-2}$; d) $\frac{7}{x+3}$ ir $\frac{2}{3x+2}$.

273. Turistas nuėjo 36 km per 6 valandas. Antrąją pusę kelio jis ėjo 3 kartus mažesniu greičiu negu pirmąją. Kokiu greičiu turistas ėjo pirmąją pusę kelio?

	Pirmoji pusė kelio (18 km)	Antroji pusė kelio (18 km)
Greitis ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$)	$3x$	x
Laikas (h)	$\frac{18}{3x}$	$\frac{18}{x}$



274. Autobusas nuvažiavo 200 km per 3 valandas. Pirmuosius 160 km autobuso greitis buvo 2 kartus didesnis negu likusią kelio dalį. Kokiu greičiu autobusas važiavo likusią dalį kelio?

275. Valtis per 2 valandas upe nuplaukė 8 km pasroviui ir tiek pat prieš srovę. Upės tėkmės greitis lygus 3 km/h. Koks yra valties greitis stovinčiame vandenyje?

276. Per 5 valandas kateris nuplaukė 60 km prieš srovę ir 60 km pasroviui. Kokiu savuoju greičiu plaukė kateris, jei srovės greitis yra 5 km/h?

277. Turistas per 2 valandas nuėjo 3 km plentu ir 6 km vieškeliu. Plentu jis ėjo 2 km/h didesniu greičiu negu vieškeliu. Kokiu greičiu turistas ėjo vieškeliu?

278. Mokiniai turėjo pasodinti 75 medelius. Kurią darbo dalį jie atliko, jei pasodino 15 medelių? 25 medelius? 75 medelius?

279. Du dažytojai, dirbdami kartu, sieną nudažo per 3 dienas. Per kiek dienų tą sieną nudažytų kiekvienas dažytojas, dirbdamas vienas, jei pirmajam reikėtų 8 dienų daugiau negu antrajam?

280. Senelis su anūku medelius pasodino per 4 dienas. Per kiek dienų tuos medelius būtų pasodinęs senelis ir per kiek anūkas, dirbdami atskirai, jei senelis medelius sodintų 15 dienų trumpiau negu anūkas?

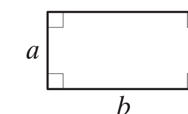
281. Baseinas pripildomas per 30 valandų. Kuri baseino dalis pripildoma per 6 valandas? 10 valandų? 30 valandų?

282. Pirmuoju vamzdžiu baseinas pripildomas per 6 valandas, o antruoju — per 10 valandų. Per kiek valandų baseinas pripildomas abiem vamzdžiais?

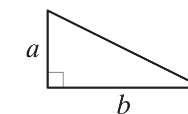
283. Dviem vamzdžiais baseinas pripildomas per 7 h 12 min. Per kiek valandų baseinas pripildomas kiekvienu vamzdžiu atskirai, jei žinoma, kad pirmuoju vamzdžiu jis pripildomas 6 valandomis greičiau negu antruoju?

284. Raskite du skaičius, kurių:
a) suma lygi 5, o sandauga lygi 4;
b) skirtumas lygus 1, o sandauga lygi 6;
c) suma lygi 1, o jų kvadratų suma lygi 13;
d) skirtumas lygus 7, o jų kvadratų suma lygi 25.

285. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių a ir b ilgius, jei stačiakampio:
a) plotas lygus 20 cm^2, o perimetras — 18 cm;
b) plotas lygus 120 m^2, o perimetras — 46 m.



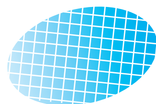
286. Apskaičiuokite stačiojo trikampio statinių a ir b ilgius, jei trikampio:
a) plotas lygus 24 cm^2, o įžambinė lygi 10 cm;
b) įžambinė lygi 17 mm, o plotas lygus 60 mm^2.



287. Raskite lygčių sistemos sprendinius.

a) $\begin{cases} y=3-x, \\ x^2-y=39; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=4+x, \\ y+x^2=10; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=4, \\ xy+7=2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy+2=0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} y-2x=0, \\ \frac{12}{y}-\frac{3}{x}=1; \end{cases}$ f) $\begin{cases} y-3x=0, \\ \frac{2}{y}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}. \end{cases}$



288. Nustatykite sandaugos $a \cdot b$ ženklą, kai:

a) $a > 0,\ b > 0$; b) $a < 0,\ b > 0$;

c) $a > 0,\ b < 0$; d) $a < 0,\ b < 0$.

289. Išskaidykite dauginamaisiais.

a) $x^2 + 6x$; b) $2x^2 - x$; c) $-5x^2 + 10x$;

d) $x^2 - 16$; e) $4x^2 - 9$; f) $-25 + 64x^2$;

g) $2x^2 - 72$; h) $x^2 - 10x + 25$; i) $16 - 56x + 49x^2$;

j) $x^2 + 3x - 10$; k) $2x^2 + 13x - 7$; l) $-3x^2 + 10x + 8$.

> $ab + ac = a \cdot (b + c)$, $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$,
> $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b) \cdot (a - b) = (a - b)^2$,
> $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$.
> $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, kai x_1, x_2 yra $ax^2 + bx + c$ šaknys.

290. Išspręskite lygtį.

a) $4 + 3x = 0$; b) $-2x + 7 = 0$; c) $-3 - 5x = 0$;

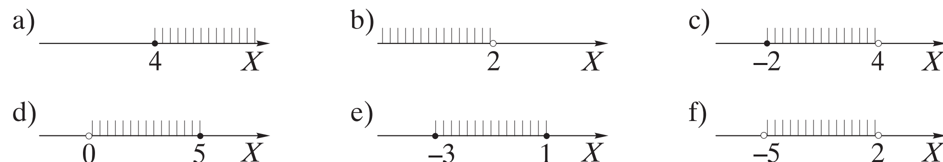
d) $x(x - 6) = 0$; e) $3x(8 + 5x) = 0$; f) $(2x - 1)(x + 2) = 0$;

g) $x^2 + 9x = 0$; h) $5x - x^2 = 0$; i) $-6x + 4x^2 = 0$;

j) $x^2 - 100 = 0$; k) $128 - 2x^2 = 0$; l) $-48 + 3x^2 = 0$;

m) $2x^2 + 3x - 2 = 0$; n) $3x^2 - 13x - 10 = 0$; o) $-2x^2 + 17x - 21 = 0$.

291. 1) Užrašykite nelygybe ir intervalu skaičius, atitinkančius užbrūkšniuotą skaičių tiesės dalį.



2) Nurodykite mažiausią natūralųjį užrašytos nelygybės sprendinį.

> Taškus, kurie priklauso intervalui, žymime pilnaviduriu skrituliuku,
> o taškus, kurie nepriklauso intervalui, žymime tuščiaviduriu skrituliuku.

292. Skaičių tiesėje pavaizduokite skaičius, tenkinančius nelygybę.

a) $x < -1$; b) $x \geqslant 3$; c) $-1 \leqslant x < 5$;

d) $0 < x \leqslant 4$; e) $-3 < x < 2$; f) $-6 \leqslant x \leqslant 0$.

293. Surašykite visus sveikuosius skaičius, priklausančius intervalui.

a) $(-3;\ 2)$; b) $[-4;\ 0)$; c) $(-1;\ 5]$;

d) $[0;\ 6]$; e) $\left[-4\frac{1}{5};\ -1\right)$; f) $(-3{,}7;\ 0{,}8]$.

294. Išspręskite nelygybę. Nelygybės sprendinius pavaizduokite skaičių tiesėje, o atsakymą užrašykite intervalu.

a) $x + 6 > -7$; b) $x - 3 \geqslant 2$; c) $x + 1 < -4$;

d) $x - 2\frac{3}{5} \leqslant 5$; e) $x + 1{,}8 > -2{,}7$; f) $x - 3{,}1 < \frac{2}{5}$.

295. Išspręskite nelygybę. Nurodykite mažiausią (didžiausią) sveikąjį nelygybės sprendinį.

a) $2x > 5$; b) $3x \geqslant -\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}x < -0{,}8$;

d) $-4x \leqslant 9$; e) $-0{,}5x > 6$; f) $-\frac{3}{4}x \geqslant -0{,}75$.

296. Išspręskite nelygybę.

a) $3x + 5 > -1$; b) $-x + 9 \leqslant -2$; c) $-4 - 3x < 2$;

d) $-1\frac{1}{2}x + 4 > -\frac{1}{2}$; e) $-2{,}4x - 1{,}8 \leqslant 3$; f) $1\frac{2}{5} - 2x \geqslant -0{,}6$;

g) $\frac{x}{2} + 5 \leqslant -3$; h) $\frac{x}{-3} - 1 > 4$; i) $2 - \frac{x}{5} < -1$.

297. Su kuriomis kintamojo reikšmėmis reiškinio:

a) $-3x + 2$ reikšmės yra teigiamos?

b) $10 - y$ reikšmės yra neigiamos?

c) $-1 - 4x$ reikšmės yra neteigiamos?

d) $-5 + 2y$ reikšmės yra neneigiamos?

298. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys turi prasmę?

a) $\sqrt{5x - 0{,}4}$; b) $\sqrt{-\frac{2}{3} + 6x}$; c) $\sqrt{\frac{x}{2} - 1{,}2}$;

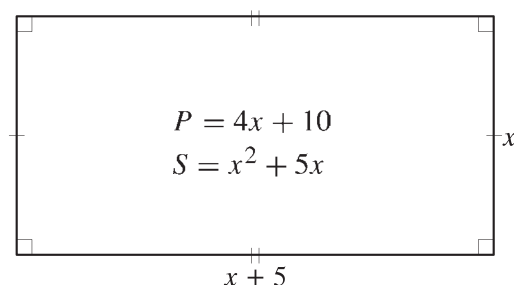
d) $\sqrt{7 - \frac{3}{5}x}$; e) $\sqrt{-\frac{1}{2}x - 8}$; f) $\sqrt{\frac{x}{-4} + 5}$.

> Reiškinys $\sqrt{2x - \frac{1}{3}}$ turi prasmę su tomis x reikšmėmis, su kuriomis pošaknis yra neneigiamas, t. y. $2x - \frac{1}{3} \geqslant 0$, $\Rightarrow$ $2x \geqslant \frac{1}{3}$, $\Rightarrow$ $x \geqslant \frac{1}{6}$.
> *Atsakymas.* $x \in \left[\frac{1}{6};\ +\infty\right)$.

4 skyrius

Kokios gali būti stačiakampio kraštinės?

Paveikslėlyje pavaizduotas stačiakampis sklypas, kurio ilgis yra 5 metrais didesnis už plotį. Stačiakampio plotį metrais pažymėkime x, tada jo ilgis lygus $x+5$ metrai.



Užrašykime, kam lygus stačiakampio perimètras ir plotas:

- $P = (x + x + 5) \cdot 2 = (2x + 5) \cdot 2 = 4x + 10$ (m);
- $S = x \cdot (x + 5) = x^2 + 5x$ (m^2).

1 užduotis. Kam lygus to stačiakampio plotis, jeigu:

1) perimetras lygus 30 m? ← Reikia išspręsti lygtį $4x + 10 = 30$.

2) perimetras mažesnis už 30 m? ← Reikia išspręsti nelygybę $4x + 10 < 30$.

3) perimetras ne mažesnis už 22 m? ← Reikia išspręsti nelygybę $4x + 10 \geqslant 22$.

4) perimetras mažesnis už 30 m, bet ne mažesnis už 22 m?

Reikia išspręsti dvigubąją nelygybę $22 \leqslant 4x + 10 < 30$,
arba dviejų nelygybių sistemą $\begin{cases} 4x + 10 \geqslant 22, \\ 4x + 10 < 30. \end{cases}$

2 užduotis. Kam lygus to stačiakampio plotis, jeigu:

1) plotas lygus 36 m^2? ← Reikia išspręsti lygtį $x^2 + 5x = 36$.

2) plotas mažesnis už 36 m^2?

Reikia išspręsti nelygybę $x^2 + 5x < 36$.
Kol kas tokių nelygybių spręsti nesimokėme.
Tokias nelygybes mokysimės spręsti šiame skyriuje.

Nelygybių sistemos, kvadratinės nelygybės

$$f(x) \cdot g(x) > 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Šiame skyriuje mokysimės spręsti:

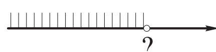
- dviejų nelygybių su vienu nežinomuoju sistemàs;
- dvigubą̃sias nelygybès;
- kvadrãtines nelygybès.

4.1. SPRENDŽIAME TIESINIŲ NELYGYBIŲ SISTEMAS

Užduotis. Koks skaičius x galėjo būti sugalvotas, jei žinoma, kad:

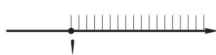
a) prie to skaičiaus pridėjus 5, gauta mažiau už 13?

Reikia išspręsti *nelygybę*: $x+5<13$, $\Rightarrow$ $x<?$.



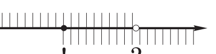
b) iš to skaičiaus atėmus 2, gauta ne mažiau už 4?

Reikia išspręsti *nelygybę*: $x-2\geqslant 4$, $\Rightarrow$ $x\geqslant !$.

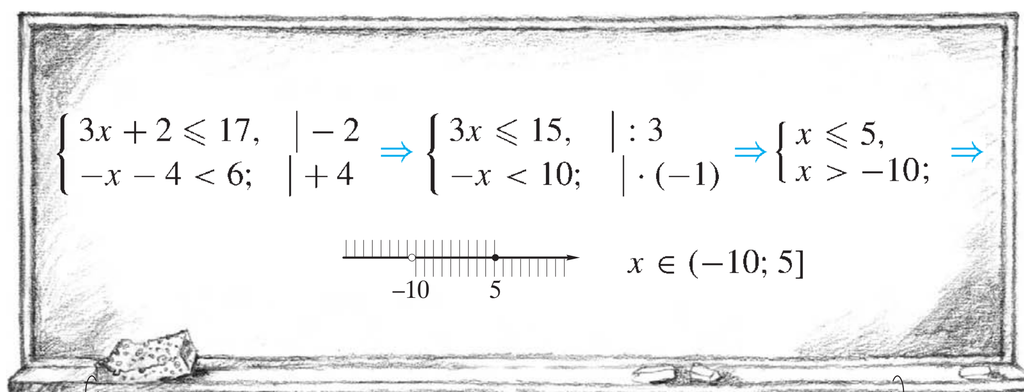


c) prie to skaičiaus pridėjus 5, gauta mažiau už 13, o atėmus 2, gauta ne mažiau už 4?

Reikia išspręsti nelygybių sistemą: $\begin{cases} x+5<13, \\ x-2\geqslant 4; \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x<?, \\ x\geqslant !. \end{cases}$



Kai ieškome dviejų nelygybių su vienu nežinomuoju bendrųjų sprendinių, tai sakome, kad sprendžiame tų nelygybių sistemą.



Dviejų nelygybių su vienu nežinomuoju sistemos sprendiniu vadinama ta nežinomojo reikšmė, su kuria yra teisingos abi nelygybės.

Išspręsti nelygybių sistemą — reiškia rasti visus sistemos sprendinius arba įsitikinti, kad sistema sprendinių neturi.

299. Kurie iš skaičių -3; 0; 2 yra nelygybių sistemos sprendiniai?

a) $\begin{cases} x\geqslant -3, \\ x<2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3-5x\leqslant 3, \\ 4x+1>-3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+5<-2, \\ 5-4x>4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x+8>1, \\ 3x+4\leqslant 10. \end{cases}$

Skaičius 7 yra nelygybių sistemos $\begin{cases} x+5<13, \\ x-3>1 \end{cases}$ sprendinys, nes kai $x=7$, tai abi sistemos nelygybės yra teisingos, t. y. $\begin{cases} 7+5<13, \\ 7-3>1. \end{cases}$

300. Abiejų sistemos nelygybių sprendinius pavaizduokite vienoje skaičių tiesėje. Tada užrašykite tos sistemos sprendinių intervalą.

a) $\begin{cases} x>2, \\ x>4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x<0, \\ x<-2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x>-3, \\ x<1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\leqslant 5, \\ x>-2; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x\leqslant 4, \\ x\geqslant 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x\leqslant 0, \\ x>-3; \end{cases}$ (–3, 0) $x\in(-3;\,0]$

301. Išspręskite nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} 2x-12>0, \\ 3x>9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x<10, \\ 2x-3<4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-9<0, \\ 12\geqslant 3x; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6-3x>-2x, \\ 9+6x\geqslant 3x; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+4\geqslant 2, \\ -3x\geqslant 6; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}5x>1, \\ x-6\leqslant -4; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x+2\geqslant 8, \\ x-1\leqslant -3; \end{cases}$ h) $\begin{cases} -x-1>0, \\ -2x+2<0. \end{cases}$

Išspręskime dviejų nelygybių su vienu nežinomuoju sistemą $\begin{cases} 10-4x<17-5x, \\ 7-5x\leqslant 11-3x. \end{cases}$

1) Išsprendžiame pirmąją sistemos nelygybę:

$10-4x<17-5x$, $\Rightarrow$ $-4x+5x<17-10$, $\Rightarrow$ $x<7$ (7)

2) Išsprendžiame antrąją sistemos nelygybę:

$7-5x\leqslant 11-3x$, $\Rightarrow$ $-5x+3x\leqslant 11-7$, $\Rightarrow$ $x\geqslant -2$ (–2)

3) Randame abiejų nelygybių bendruosius sprendinius:

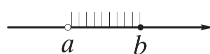
$\begin{cases} x<7, \\ x\geqslant -2; \end{cases}$ (–2, 7) *Atsakymas.* $x\in[-2;\,7)$.

302. Su kuriomis x reikšmėmis abiejų reiškinių $x-2$ ir $0{,}5x+1$ reikšmės yra:
a) teigiamos? b) neigiamos? c) neteigiamos? d) neneigiamos?

303. Koks skaičius buvo sugalvotas, jei, tą skaičių padauginus iš 2 ir iš sandaugos atėmus 1, gauta mažiau už 14, o prie sugalvotam skaičiui priešingo skaičiaus pridėjus 2, gauta ne daugiau už 7?

4.2. SPRENDŽIAME DVIGUBĄSIAS NELYGYBES

Skaičiùs x, kurie yra didesni už skaičių a, bet ne didesni už skaičių b (čia $a < b$), galima:

- pažymėti skaičių tiesėje; 
- užrašyti intervalu; $x \in (a; b]$
- užrašyti nelygybių sistema; $\begin{cases} x > a, \\ x \leqslant b \end{cases}$
- užrašyti dvigubąja nelygybe. $a < x \leqslant b$

Užduotis.
Koks skaičius x buvo sugalvotas, jei žinoma, kad, prie to skaičiaus pridėjus 5, gauta daugiau už 10, bet ne daugiau už 13?

Šį uždavinį galima išspręsti sudarius nelygybių sistemą
$\begin{cases} x + 5 > 10, \\ x + 5 \leqslant 13. \end{cases}$

Bet šią sąlygą galima užrašyti ir dvigubąja nelygybe
$10 < x + 5 \leqslant 13$.

Išspręskite sąlygą atitinkančią dvigubąją nelygybę, nekeisdami jos dviejų nelygybių sistema.

Dvigubąją nelygybę galima spręsti panašiai kaip paprastąją nelygybę:

- pridedant (atimant) po tą patį skaičių;
- dauginant (dalijant) iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus.

$$6 \leqslant 4x - 2 < 10, \quad | + 2$$
$$6 + 2 \leqslant 4x - 2 + 2 < 10 + 2,$$
$$8 \leqslant 4x < 12, \quad | : 4$$
$$\frac{8}{4} \leqslant \frac{4x}{4} < \frac{12}{4},$$
$$2 \leqslant x < 3.$$

Atsakymas. $x \in [2; 3)$.

Spręsdami dvigubąją nelygybę, vienodai pertvarkome jos kairiąją, vidurinę ir dešiniąją dalis, siekdami viduryje gauti tik nelygybės nežinomąjį.

$\begin{cases} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

304. Dvigubosios nelygybės sprendinius pavaizduokite skaičių tiesėje ir užrašykite intervalu. Užrašykite dviejų nelygybių sistemą, atitinkančią tą nelygybę.
a) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; b) $0 < x \leqslant 5$; c) $-3 \leqslant x < 4$; d) $-3 < x < 1$.

$-1 < x \leqslant 3$; (skaičių tiesė: −1, 3) $x \in (-1; 3]$; $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$

305. Dvigubąją nelygybę užrašykite dviejų nelygybių sistema, o tada išspręskite tą sistemą.
a) $3 < x+1 < 5$; b) $-1 < x-2 \leqslant 4$; c) $4 \leqslant 2x \leqslant 6$; d) $-4 \leqslant 2x-9 < 1$.

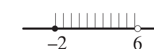
$-2 \leqslant -2x + 2 < 10$;

$\begin{cases} -2x + 2 \geqslant -2, \\ -2x + 2 < 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x \geqslant -4, \\ -2x < 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -4; \end{cases}$ (skaičių tiesė: −4, 2) $x \in (-4; 2]$.

306. Išspręskite dvigubąją nelygybę, nekeisdami jos dviejų nelygybių sistema.
a) $3 < x + 1 < 5$; b) $4 \leqslant 2x \leqslant 6$; c) $-1 < \frac{x}{2} \leqslant 3$; d) $-3 \leqslant 2x + 7 < 4$;
e) $-2 < 1 - 2x < 0$; f) $-1 \leqslant \frac{-x+7}{3} \leqslant 3$; g) $0 < \frac{5-2x}{4} \leqslant 1$.

$-1 < \frac{4-x}{2} \leqslant 3, \quad | \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < 4 - x \leqslant 6, \quad | -4 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -6 < -x \leqslant 2, \quad | \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad 6 > x \geqslant -2; \quad \Rightarrow \quad x \in [-2; 6).$



307. Su kuriomis x reikšmėmis:
a) dvinario $2x - 9$ reikšmės priklauso intervalui $[-3; 0)$?
b) reiškinio $12 - 5x$ reikšmės priklauso intervalui $(-4; 4]$?
c) dvinario $-0{,}5x + 11$ reikšmės priklauso intervalui $[-6; 2]$?

Dvinario $2x + 5$ reikšmės priklauso intervalui $(-2; 4]$ su tomis x reikšmėmis, su kuriomis yra teisinga dviguboji nelygybė

$-2 < 2x + 5 \leqslant 4$.

308. Nurodykite didžiausią ir mažiausią sveikuosius dvigubosios nelygybės sprendinius.
a) $-4 \leqslant 2{,}5 - 6{,}5x \leqslant 4$; b) $-10{,}5 < 10x - 6 \leqslant 25{,}9$.

309. Koks sveikasis skaičius buvo sugalvotas, jei žinoma, kad, tą skaičių padauginus iš -2 ir prie sandaugos pridėjus 3, gauta ne mažiau už 3, bet ne daugiau už 9?

4.3. SPRENDŽIAME KVADRATINES NELYGYBES $ax^2 + bx \gtrless 0$

Prisiminkime:
- Sandauga $a \cdot b$ yra ***teigiamà***, kai abu dauginamieji a ir b yra vienodų ženklų.
- Sandauga $a \cdot b$ yra ***neigiamà***, kai abu dauginamieji a ir b yra skirtingų ženklų.

$a \cdot b > 0$, kai arba $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0; \end{cases}$ arba $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases}$

$a \cdot b < 0$, kai arba $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0; \end{cases}$ arba $\begin{cases} a < 0, \\ b > 0. \end{cases}$

1 užduotis. Nustatykite x reikšmes, su kuriomis sandauga

$x \cdot (x - 3)$ Reikia išspręsti nelygybę $x(x - 3) \gtrless 0$.

a) yra teigiama; b) yra neigiama.

Išspręskime nelygybę $x \cdot (x + 5) > 0$.

Sandauga $x \cdot (x + 5)$ yra teigiama, kai arba 1) $\begin{cases} x < 0, \\ x + 5 < 0; \end{cases}$ arba 2) $\begin{cases} x > 0, \\ x + 5 > 0. \end{cases}$

Išsprendžiame abi nelygybių sistemas:

1) $\begin{cases} x < 0, \\ x + 5 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x < -5; \end{cases} \Rightarrow x < -5, \quad \underline{x \in (-\infty; -5)};$

2) $\begin{cases} x > 0, \\ x + 5 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > -5; \end{cases} \Rightarrow x > 0, \quad \underline{x \in (0; +\infty)}.$

Nelygybės sprendiniai yra abiejų sistemų sprendinių visuma.

Atsakymas. $x \in (-\infty; -5), (0; +\infty)$.

2 užduotis. Išspręskite nelygybę

$x^2 - 3x \leqslant 0$. Reiškinį $x^2 - 3x$ išskaidykite dauginamaisiais.

$$ax^2 + bx > 0, \quad x(ax + b) > 0; \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ ax + b > 0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x < 0, \\ ax + b < 0. \end{cases}$$

$$ax^2 + bx \leqslant 0, \quad x(ax + b) \leqslant 0; \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ ax + b \leqslant 0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x \leqslant 0, \\ ax + b \geqslant 0. \end{cases}$$

310. Išspręskite nelygybę.

a) $x(x - 2) > 0$; b) $x(x + 6) < 0$; c) $x(3 - x) \geqslant 0$;
d) $x(-5 + x) \leqslant 0$; e) $5x(x + 1) > 0$; f) $-3x(2 - x) < 0$.

$2x(x - 1) > 0, \quad |:2$
$x(x - 1) > 0,$
....

$-2x(x - 1) > 0, \quad |:(-2)$
$x(x - 1) < 0,$
....

311. Išspręskite nelygybę.

a) $4x^2 - x > 0$; b) $x - 9x^2 < 0$; c) $2x^2 - 6x \geqslant 0$;
d) $-2x^2 + 7x \leqslant 0$; e) $-4x - 5x^2 > 0$; f) $-x^2 + x < 0$;
g) $0{,}2x^2 - 3x \geqslant 0$; h) $5x - 1{,}5x^2 \leqslant 0$; i) $-0{,}3x^2 - 2{,}4x > 0$.

312. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys turi prasmę?

a) $\sqrt{5x - x^2}$; b) $\sqrt{-4x^2 + 10x}$; c) $\sqrt{-9x - 2x^2}$; d) $\sqrt{x - 7x^2}$.

313. Išspręskite nelygybę.

a) $x^2 > 25x$; b) $x^2 \leqslant 16x$; c) $0{,}3x^2 \leqslant 0{,}6x$;
d) $0{,}5x^2 > -1{,}5x$; e) $4x \leqslant -x^2$; f) $-2x \geqslant x^2$.

314. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio

a) $0{,}6x^2 - 4x$; b) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x$; c) $\frac{2}{5}x - 0{,}1x^2$; d) $1{,}4x + \frac{1}{5}x^2$;

reikšmė yra:

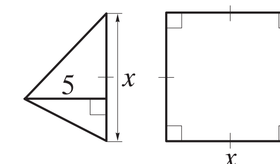
1) lygi nuliui? 2) teigiama? 3) neigiama?

315. Raskite mažiausią natūralųjį nelygybės sprendinį.

a) $x^2 - 1{,}5x \geqslant 0$; b) $1{,}6x^2 - 2x > 0$; c) $-3x - 0{,}5x^2 \leqslant 0$.

316. Su kuriomis x reikšmėmis trikampio plotas:

a) lygus kvadrato plotui?
b) mažesnis už kvadrato plotą?
c) didesnis už kvadrato plotą?



Trikampio plotas yra lygus kraštinės ilgio ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgio sandaugos pusei.

317. Koks skaičius buvo sugalvotas, jei žinoma, kad, tą skaičių padauginus iš vienetu mažesnio skaičiaus, gautas teigiamas skaičius?

4.4. SPRENDŽIAME KVADRATINES NELYGYBES $ax^2 + c \geqslant 0$

1 užduotis. Nustatykite x reikšmes, su kuriomis sandauga

$(x+3)\cdot(x-3)$

Reikia išspręsti nelygybę $(x+3)(x-3) \geqslant 0$.

a) yra teigiama; b) yra neigiama.

2 užduotis. Išspręskite nelygybę

$x^2 - 9 \geqslant 0$.

Reiškinį $x^2 - 9$ išskaidykite dauginamaisiais.

Išspręskime nelygybę $x^2 - 25 \leqslant 0$.

Kairiąją nelygybės pusę išskaidykime dauginamaisiais:

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x-5)\cdot(x+5).$$

Sprendžiame nelygybę $(x-5)(x+5) \leqslant 0$, keisdami ją dviem nelygybių sistemomis:

1) $\begin{cases} x-5 \leqslant 0, \\ x+5 \geqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant -5; \end{cases} \Rightarrow$ $x \in [-5; 5]$;

2) $\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ x+5 \leqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \leqslant -5; \end{cases} \Rightarrow$ sistema sprendinių neturi.

Atsakymas. $x \in [-5; 5]$.

3 užduotis. Išspręskite nelygybę. a) $x^2 + 9 > 0$; b) $x^2 + 9 \leqslant 0$.

Reiškinys $x^2 + 9$ dauginamaisiais neišskaidomas! Ką daryti?

Išspręskime nelygybę

$x^2 + 25 \geqslant 0$.

Reiškinio $x^2 + 25$ reikšmės yra *teigiamos* su visomis x reikšmėmis. Iš tikrųjų x^2 yra neneigiamas skaičius, o prie neneigiamo skaičiaus *pridėjus teigiamą skaičių* (25), gaunamas teigiamas skaičius. Vadinasi, visi skaičiai yra nelygybės

$x^2 + 25 \geqslant 0$

sprendiniai.

Nelygybė $x^2 + 25 < 0$ sprendinių neturi.

Atsakymas. $x \in (-\infty; +\infty)$.

318. Dvinarį išskaidykite dauginamaisiais.

a) $x^2 - 64$; b) $16x^2 - 9$; c) $49 - 36x^2$; d) $100x^2 - 1$;
e) $0{,}04 - x^2$; f) $0{,}16x^2 - 36$; g) $\frac{4}{9}x^2 - 0{,}01$; h) $9x^2 - 1\frac{9}{16}$.

319. Išspręskite nelygybę.

a) $x^2 - 1 > 0$; b) $x^2 - 9 < 0$; c) $16 - x^2 \geqslant 0$; d) $49 - x^2 \leqslant 0$;
e) $4x^2 - 25 > 0$; f) $-9x^2 + 1 < 0$; g) $-16 + 9x^2 \leqslant 0$; h) $81x^2 - 100 \geqslant 0$.

320. Išspręskite nelygybę.

a) $3x^2 - 48 > 0$; b) $8x^2 - 98 < 0$;
c) $0{,}2x^2 \geqslant 3{,}2$; d) $2x^2 < \frac{1}{32}$;
e) $3x^2 \leqslant 5\frac{1}{3}$; f) $3\frac{1}{8} > 2x^2$.

$2x^2 - 18 > 0,$
$2(x^2 - 9) > 0, \quad |:2$
$x^2 - 9 > 0,$
......

321. Raskite nelygybių bendruosius sveikuosius sprendinius.

a) $x^2 - 9x < 0$ ir $x^2 - 9 \leqslant 0$; b) $8x - x^2 \geqslant 0$ ir $16 - x^2 > 0$;
c) $x - 5 \geqslant 0$ ir $x^2 - 25 \leqslant 0$; d) $x - 7 < 0$ ir $x^2 - 49 > 0$.

322. Nurodykite teisingo atsakymo raidę.

a) $x^2 + 81 > 0$; **A** $x \in (-\infty; +\infty)$ **B** Sprendinių nėra **C** $x \in (9; +\infty)$
b) $2x^2 + 98 \leqslant 0$; **A** $x \in [-7; 7]$ **B** $x \in (-\infty; +\infty)$ **C** Sprendinių nėra
c) $x^2 - 16 \leqslant 0$; **A** $x \in (-\infty; +\infty)$ **B** $x \in [-4; 4]$ **C** Sprendinių nėra
d) $2x^2 - 2 > 0$; **A** $x \in (-\infty; +\infty)$ **B** $x \in (-1; 1)$ **C** $x \in (-\infty; -1), (1; +\infty)$
e) $-x^2 - 4 \geqslant 0$; **A** $x \in [-2; 2]$ **B** $x \in (-\infty; +\infty)$ **C** Sprendinių nėra
f) $-3x^2 - 9 \leqslant 0$; **A** $x \in (-\infty; +\infty)$ **B** $x \in [3; +\infty)$ **C** Sprendinių nėra
g) $-x^2 + 9 > 0$; **A** $x \in (-3; 3)$ **B** $x \in (-\infty; +\infty)$ **C** $x \in (-\infty; -3), (3; +\infty)$
h) $-5x^2 + 5 < 0$. **A** $x \in (-1; 1)$ **B** $x \in (1; +\infty)$ **C** $x \in (-\infty; -1), (1; +\infty)$

323. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys turi prasmę?

a) $\sqrt{144 - 9x^2}$; b) $\sqrt{121x^2 - 25}$; c) $\sqrt{49x^2 + 100}$.

324. Išspręskite nelygybę.

a) $x^2 + 100 > 0$; b) $x^2 + 121 < 0$; c) $-x^2 - 1 \leqslant 0$; d) $-3x^2 - 15 \geqslant 0$.

325. Koks natūralusis skaičius buvo sugalvotas, jei žinoma, kad, prie to skaičiaus kvadratui priešingo skaičiaus pridėjus vienetą, gautas neneigiamas skaičius?

4.5. SPRENDŽIAME KVADRATINES NELYGYBES $ax^2 + bx + c \geqslant 0$

1 užduotis. Nustatykite x reikšmes, su kuriomis sandauga

$(x+2)\cdot(x-3)$ Reikia išspręsti nelygybę $(x+2)(x-3) \geqslant 0$.

a) yra teigiama; b) yra neigiama.

2 užduotis. Išspręskite nelygybę

$x^2 - x - 6 \leqslant 0$. Kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais.

Jei kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ turi dvi šaknis x_1 ir x_2, tai jį galima išskaidyti dauginamaisiais: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Išspręskime nelygybę $x^2 + x - 20 \geqslant 0$.

Pirmiausia kairiąją nelygybės pusę išskaidykime dauginamaisiais.

1) Randame x reikšmes, su kuriomis

$$x^2 + x - 20 = 0, \Rightarrow D = 81, \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -5.$$

2) Vadinasi, $x^2 + x - 20 = (x-4)(x+5)$.

Sprendžiame nelygybę $(x-4)\cdot(x+5) \geqslant 0$:

$$\begin{cases} x - 4 \leqslant 0, \\ x + 5 \leqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \leqslant -5; \end{cases} \Rightarrow \underline{x \leqslant -5};$$

$$\begin{cases} x - 4 \geqslant 0, \\ x + 5 \geqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 4, \\ x \geqslant -5; \end{cases} \Rightarrow \underline{x \geqslant 4}.$$

Atsakymas. $x \in (-\infty; -5], [4; +\infty)$.

3 užduotis. Išspręskite nelygybę. a) $x^2 - x + 6 > 0$; b) $x^2 - x + 6 < 0$.

O ką daryti, kai kvadratinis trinaris neišskaidomas dauginamaisiais?

Išspręskime nelygybę $x^2 + 6x + 10 < 0$.

Kvadratinis trinaris $x^2 + 6x + 10$ šaknų neturi, nes $D = -4 < 0$. Vadinasi, jis dauginamaisiais neiškaidomas. Iš trinario $x^2 + 6x + 10$ išskirkime dvinario kvadratą:

$x^2 + 6x + 10 = \underline{x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2} - 3^2 + 10 = (x+3)^2 + 1$.

Kadangi $(x+3)^2$ su visais x yra neneigiamas, tai $(x+3)^2 + 1$ yra teigiamas. Vadinasi, su visomis x reikšmėmis $x^2 + 6x + 10 > 0$.

Atsakymas. Sprendinių nėra.

326. Išspręskite nelygybę.

a) $(x-2)(x+3) > 0$; b) $(x+7)(5-x) < 0$; c) $(4+x)(1-2x) \leqslant 0$.

327. Kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais.

a) $x^2 + 4x - 5$; b) $x^2 + 5x - 24$; c) $2x^2 - x - 1$;

d) $-6x^2 + 7x - 2$; e) $-4x^2 - 7x + 2$; f) $-3x^2 - 8x + 3$.

328. Išspręskite kvadratinę nelygybę.

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$; b) $x^2 + 2x - 3 < 0$; c) $3x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$;

d) $2x^2 + 3x - 2 \geqslant 0$; e) $-x^2 - x + 12 > 0$; f) $-2x^2 + x + 1 > 0$.

329. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio reikšmė yra lygi nuliui? yra teigiama? yra neigiama?

a) $(x+4)(3-7x)$; b) $6x^2 - 13x + 5$; c) $-2x^2 + 7x - 6$.

330. Išspręskite nelygybę.

a) $x^2 - 5 < 4x$; b) $5x^2 > 3 - 2x$; c) $10x - 12 \leqslant 2x^2$; d) $6x^2 + 7x \geqslant 3$.

331. 1) Raskite nelygybės didžiausią sveikąjį sprendinį.

a) $3x - x^2 > -40$; b) $-5x \geqslant 3x^2 - 2$.

2) Raskite nelygybės mažiausią sveikąjį sprendinį.

a) $x^2 + 7x \leqslant 30$; b) $10x < -x^2 - 9$.

332. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį.

a) $\sqrt{x^2 + 8x + 7}$; b) $\sqrt{x^2 - 6x + 5}$; c) $\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$; d) $\sqrt{-2 + x + x^2}$.

Reiškinio $f(x)$ apibrėžimo sritį sudaro tos kintamojo x reikšmės, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę.

333. Stačiakampio ilgis 2 cm didesnis už jo plotį. Koks gali būti stačiakampio plotis, jeigu jo plotas ne didesnis už 224 cm^2?

334. Koks neigiamas sveikasis skaičius buvo sugalvotas, jei žinoma, kad, iš to skaičiaus kvadrato atėmus tą skaičių ir dar atėmus 2, gautas neneigiamas skaičius?

335. Nurodykite teisingo atsakymo raidę. **A** $x \in (-\infty; +\infty)$ **B** Sprendinių nėra

a) $(x+1)^2 + 5 > 0$; b) $-(x+7)^2 - 3 < 0$; c) $2(x-3)^2 + 6 \geqslant 0$;

d) $x^2 + 4x + 7 < 0$; e) $-x^2 + 6x - 10 > 0$; f) $-4x^2 + 8x - 5 \geqslant 0$.

Kai kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ yra neiškaidomas dauginamaisiais (taip būna, kai $D = b^2 - 4ac \underline{<0}$), tada:

- jei $a > 0$, tai su visomis x reikšmėmis $ax^2 + bx + c > 0$;
- jei $a < 0$, tai su visomis x reikšmėmis $ax^2 + bx + c < 0$.

APIBENDRINAME

Tiesinės nelygybės

Nelygybė, kurią galima užrašyti

$$ax \pm b \gtrless 0,$$

čia a, b yra skaičiai ($a \neq 0$), x — nežinomasis, vadinama ***tiesinė nelygýbe***.

Tiesìnės nelygýbės sprendžiamos taip pat, kaip ir lygtys $ax \pm b = 0$, tik reikia pakeisti nelygybės ženklą priešingu, kai abi jos puses dauginame ar dalijame iš to paties *neigiamojo* skaičiaus.

Išspręsti nelygybę — reiškia rasti visas nežinomojo reikšmes, su kuriomis ta nelygybė yra teisinga.

$-2x + 5 > 0, \quad | -5$

$-2x > -5, \quad | : (-2)$

$x < \frac{5}{2};$

$x \in \left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right).$

Tiesinių nelygybių sistemos

Kai ieškome dviejų ar daugiau nelygybių bendrųjų sprendinių, tai sakome, kad sprendžiame tų nelygybių sistemą.

$\begin{cases} ax \pm b \gtrless 0, \\ cx \pm d \gtrless 0 \end{cases}$ — dviejų tiesinių nelygybių sistema.

Spręsdami nelygybių sistemą, randame:
1) kiekvienos nelygybės sprendinius;
2) bendruosius tų nelygybių sprendinius.

$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ 6 - x \geqslant 0; \end{cases}$
$\begin{cases} 2x > -3, \\ -x \geqslant -6; \end{cases}$
$\begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \leqslant 6; \end{cases}$

$x \in \left(-1\frac{1}{2}; 6\right].$

Dvigubosios nelygybės

Nelygybė

$$f(x) < g(x) < h(x),$$

čia $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — reiškiniai, vadinama ***dvìgubaja nelygýbe***.

$-2 < x + 3 \leqslant 7, \quad |-3$

$-5 < x \leqslant 4;$

$x \in (-5; 4].$

Dvigubąją nelygybę galima pakeisti dviejų nelygybių sistema:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) < h(x). \end{cases}$$

Dvigubąją nelygybę galima spręsti ir taip:

$\begin{cases} x + 3 > -2, \\ x + 3 \leqslant 7; \end{cases}$
$\begin{cases} x > -5, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$

Kvadratinės nelygybės

Nelygybė, kurią galima užrašyti

$ax^2 + bx + c \gtrless 0,$

čia a, b, c yra skaičiai ($a \neq 0$), x — nežinomasis, vadinama ***kvadrãtine nelygýbe***.

$x^2 - x - 6 > 0,$

$a = 1$, $b = -1$, $c = -6$.

$\begin{cases} f(x) \lessgtr 0 \\ g(x) \lessgtr 0 \end{cases}$ $ax^2 + bx + c \lessgtr 0$

Kvadratinių nelygybių algebrinis sprendimas

Spręsdami kvadratinę nelygybę:

- kairiąją jos pusę skaidome dauginamaisiais:

  $ax^2 + bx + c \gtrless 0, \quad a(x - x_1)(x - x_2) \gtrless 0;$

  čia x_1 ir x_2 yra lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendiniai;
- tada sprendžiame dvi dviejų nelygybių sistemas:

  $\begin{cases} x - x_1 \lessgtr 0, \\ x - x_2 \lessgtr 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - x_1 \gtrless 0, \\ x - x_2 \gtrless 0. \end{cases}$

$x^2 - x - 6 > 0,$

$(x + 2)(x - 3) > 0:$

1) $\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x - 3 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x > 3; \end{cases}$ $\Downarrow$ $x > 3;$

2) $\begin{cases} x + 2 < 0, \\ x - 3 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -2, \\ x < 3; \end{cases}$ $\Downarrow$ $x < -2.$

Ats. $x \in (-\infty; -2)$, $(3; +\infty)$.

Jei kairioji nelygybės pusė dauginamaisiais neišskaidoma, t. y. nėra tokių x, su kuriais

$ax^2 + bx + c = 0,$

tai su visais x:

- $ax^2 + bx + c > 0$, kai $a > 0$;
- $ax^2 + bx + c < 0$, kai $a < 0$.

$x^2 + x + 3 > 0$, $D = -11$; $\Rightarrow$

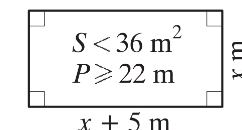
$x^2 + x + 3 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{3}{4} > 0.$

Nelygybės $x^2 + x + 3 > 0$ sprendiniai yra visi skaičiai.

Nelygybė $x^2 + x + 3 < 0$ sprendinių neturi.

Kokios gali būti stačiakampio kraštinės?

Stačiakampio ilgis yra 5 metrais didesnis už jo plotį. Kokios gali būti to stačiakampio kraštinės, jei jo plotas yra mažesnis už 36 m², o perimetras ne mažesnis už 22 m?



Sprendimas.

1) Trumpesniąją kraštinę pažymėkite x. Tada ilgesnioji kraštinė lygi ......
2) Užrašykite, kam lygus to stačiakampio plotas ir kam lygus jo perimetras

   $x \cdot$ ......, $\quad (x +$ ......$) \cdot 2$

3) Pagal sąlygą užrašykite dvi nelygybes (nelygybių sistemą):

   $x \cdot$ ...... $<$ ......, $\quad 4x +$ ...... $\geqslant$ ......

4) Išspręskite tas nelygybes.
5) Raskite tų nelygybių bendruosius sprendinius.
6) Nurodykite šio stačiakampio kraštinių ilgius, jeigu $x \in \boldsymbol{N}$.

SPRENDŽIAME

336. a) Raskite nelygybės mažiausią sveikąjį sprendinį.
1) $3(x-2)-4x<1+2x$; 2) $6x+1\geqslant 2(x-1)-3x$.
b) Raskite nelygybės didžiausią sveikąjį sprendinį.
1) $3(1-x)\geqslant 2(2-x)$; 2) $4(2x-2)<5(1-x)$.

337. Su kuriomis x reikšmėmis:
a) reiškinio $\frac{x}{3}$ reikšmės ne didesnės už atitinkamas reiškinio $\frac{x+1}{4}$ reikšmes?
b) reiškinio $\frac{x-1}{5}$ reikšmės ne mažesnės už atitinkamas reiškinio $\frac{3+x}{2}$ reikšmes?
c) trupmenų $\frac{7x-3}{6}$ ir $\frac{-5x+2}{4}$ suma mažesnė už trupmenos $\frac{2x+5}{18}$ reikšmę?
d) trupmenų $\frac{3x-5}{6}$ ir $\frac{6x-7}{15}$ skirtumas didesnis už trupmenos $\frac{x-3}{9}$ reikšmę?

338. Išspręskite nelygybę.
a) $(4x-1)^2>(2x+3)(8x-1)$; b) $(12x-1)(3x+1)<1+(6x+2)^2$;
c) $(x-3)(x+2)-(x-3)^2>6x-10$;
d) $(9x-2)(4x+1)-(6x-1)^2>-7(x+4)$.

339. Išspręskite tiesinių nelygybių sistemą.
a) $\begin{cases}\frac{5}{6}x-10\leqslant 0,\\ 3x-1\frac{1}{3}\leqslant 0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-\frac{1}{3}x\geqslant 1,\\ x-\frac{1}{2}\leqslant 2+\frac{1}{2}x;\end{cases}$
c) $\begin{cases}0{,}6x-2{,}6>0{,}8x+1{,}4,\\ 3-2{,}6x>-2{,}5x+6;\end{cases}$ d) $\begin{cases}0{,}9x-3>6{,}9x+7{,}2,\\ 0{,}6x\leqslant\frac{2}{3}x+0{,}2.\end{cases}$

340. Raskite nelygybių sistemos sveikuosius sprendinius.
a) $\begin{cases}12-5x\leqslant 4(1-x),\\ 15-\frac{x}{3}>x;\end{cases}$ b) $\begin{cases}12-6x\geqslant 5(1-x),\\ \frac{x}{2}+4{,}5<2x;\end{cases}$
c) $\begin{cases}\frac{x+3}{2}-\frac{2x+7}{5}\geqslant 0,\\ \frac{2x-3}{7}+\frac{x+2}{3}<\frac{5}{21};\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{5x+7}{6}-\frac{3x}{4}<\frac{11x-7}{12},\\ \frac{1-3x}{2}-\frac{1-4x}{3}\geqslant\frac{x}{6}-1.\end{cases}$

341. Išspręskite dvigubąją nelygybę.
a) $-2{,}5<1{,}5x-4<2$; b) $0<1-3{,}5x\leqslant 8$;
c) $-2{,}5\leqslant\frac{3x-12}{4}\leqslant 1{,}5$; d) $-1{,}4\leqslant\frac{7-2x}{6}<5{,}8$.

342. Raskite nelygybės:
a) $0{,}1\leqslant 1{,}2x-1{,}1\leqslant 2{,}5$ sprendinius, priklausančius intervalui $[2; 4]$;
b) $-0{,}6\leqslant 0{,}1-0{,}7x\leqslant 2{,}2$ sprendinius, priklausančius intervalui $[-5; 0]$.

343. Išspręskite nelygybių sistemą.
a) $\begin{cases}0{,}3x-0{,}9>0,\\ 0<5x-1\leqslant 24;\end{cases}$ b) $\begin{cases}-0{,}6<0{,}4-x<0{,}6,\\ 10{,}8-2x>9;\end{cases}$
c) $\begin{cases}1{,}6x-8\geqslant 0,\\ -1<0{,}3x-2<1;\end{cases}$ d) $\begin{cases}5{,}4-3x<0,\\ -2\leqslant 10-4x\leqslant 2.\end{cases}$

$\begin{cases}f(x)\leqslant 0\\ g(x)\leqslant 0\end{cases}$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$

344. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys turi prasmę.
a) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{x}$? b) $\sqrt{\frac{5x-7}{2}}+\sqrt{x-3}$?
c) $\sqrt{\frac{x}{2}-4}-\sqrt{7+x}$? d) $\sqrt{\frac{2x-1}{4}}-\sqrt{\frac{x}{5}-\frac{x+1}{3}}$?

Reiškinys $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-\frac{x}{2}}$ turi prasmę, kai:
$\begin{cases}2x+1\geqslant 0,\\ 3-\frac{x}{2}\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x\geqslant -1,\\ -\frac{x}{2}\geqslant -3;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geqslant -\frac{1}{2},\\ x\leqslant 6.\end{cases}$ *Atsakymas.* $x\in\left[-\frac{1}{2}; 6\right]$.

345. Išspręskite trijų nelygybių sistemą.
a) $\begin{cases}5x\geqslant 0,\\ \frac{x-4}{3}<0,\\ 2-x>-3x;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-1<1,\\ \frac{x+8}{2}\geqslant 4,\\ 5x-2<x+4.\end{cases}$

$\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x<4,\\ x\leqslant 1.\end{cases}$ $\Rightarrow$ −3 1 4

346. Prie sveikojo skaičiaus pridėjus jo pusę, gaunamas skaičius, mažesnis už 54. Iš dvigubo to sveikojo skaičiaus atėmus jo pusę, gaunamas skaičius, didesnis už 51. Raskite tą sveikąjį skaičių.

347. Parašyti trys vienas po kito einantys nelyginiai skaičiai. Trigubo pirmojo skaičiaus ir antrojo skaičiaus suma yra didesnė už 174, o dvigubo trečiojo skaičiaus ir antrojo skaičiaus suma yra mažesnė už 151. Raskite tuos skaičius.

348. Raskite tris iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, jeigu žinoma, kad antrojo skaičiaus ir prieš jį einančio dvigubo skaičiaus suma yra mažesnė už 104, o antrojo skaičiaus ir po jo einančio trigubo skaičiaus suma yra didesnė už 134.

349. Varžybose dviratininkai įveikė 155 km distanciją. Dviratininkai startavo vienas po kito 5 minučių intervalu. Pirmo dviratininko vidutinis greitis distancijoje buvo 30 km/h. Kokiu vidutiniu greičiu važiavo trečiasis dviratininkas, jei žinoma, kad jis finišavo anksčiau už pirmąjį?

350. Padaręs 8 reisus, autobusas pervežė daugiau kaip 185 keleivius, o padaręs 15 reisų — mažiau kaip 370 keleivių. Kiek vietų yra autobuse, jeigu per visus tuos reisus autobusas buvo pilnas?

351. Išspręskite nelygybę.
a) $3x^2-2{,}4x\geqslant 0$; b) $0{,}6x+3x^2\leqslant 0$;
c) $12x-1{,}92x^2>0$; d) $-2{,}1x^2+10{,}5x<0$;
e) $7x^2\geqslant 0{,}42x$; f) $8x^2<\frac{2}{5}x$;
g) $0{,}5x<-\frac{1}{2}x^2$; h) $2x^2-0{,}5x\geqslant -x$;
i) $\frac{2}{3}x-x^2<x-\frac{1}{2}x^2$; j) $(x+4)(x+5)\leqslant 20$;
k) $(3x-7)(x+2)\leqslant 5x^2-14$; l) $(x+6)^2-3x>3(x+12)$.

352. Išspręskite nelygybę.

a) $2{,}25x^2 - 4 > 0$; b) $6\frac{1}{4} - 4x^2 \leqslant 0$;

c) $9 \geqslant 0{,}49x^2$; d) $6x^2 - 96 < 0$;

e) $4x^2 > 0{,}81$; f) $10\frac{1}{8} - 2x^2 < 0$;

g) $(x+5)(x-5) < 24$; h) $x(x-15) \geqslant 3(108-5x)$;

i) $x^2 + 16 > 0$; j) $(x-7)(x+3) + (x-1)(x+5) \leqslant 102$;

k) $9 \leqslant -25x^2$; l) $-x^2 - 16 > 0$.

353. Su kuriomis x reikšmėmis:

a) reiškinio $4(8-7x)$ reikšmės didesnės už atitinkamas reiškinio $4x(2x-7)$ reikšmes?

b) reiškinių $(3x-7)^2$ ir $42x-4$ reikšmių suma mažesnė už 61?

c) reiškinių $3x-1$ ir $x+5$ reikšmių sandauga ne didesnė už -5?

d) reiškinių $(3x-5)^2$ ir $(5-x)(5+x)$ reikšmių skirtumas yra neneigiamas?

354. Išspręskite nelygybę.

a) $6x^2 - 7x + 2 \geqslant 0$; b) $-\frac{1}{3}x^2 + 8x + 27 < 0$;

c) $0{,}2x^2 + 0{,}4x - 7 \leqslant 0$; d) $\frac{1}{2}x^2 - 4{,}5x < -4$;

e) $-10x^2 + 3{,}5x - 0{,}3 > 0$; f) $(x-1)(x+3) > 5$;

g) $(5x+7)(x-2) < 21x^2 - 11x - 13$; h) $4x^2 + 5x + 9 \geqslant 2x(3x+1)$.

355. Išspręskite nelygybes ir raskite jų bendruosius sprendinius.

a) $x^2 - 3x > 0$ ir $x + 3 \geqslant 0$; b) $5x - x^2 > 0$ ir $2x - 5 \leqslant 0$;

c) $3x^2 - 2x - 5 \leqslant 0$ ir $x^2 - 1 < 0$; d) $16 - x^2 > 0$ ir $4x - x^2 \geqslant 0$;

e) $x^2 < 4$ ir $5x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$; f) $2x - x^2 \leqslant 0$ ir $7x + 10 > -x^2$.

356. Raskite nelygybės sveikųjų sprendinių aritmetinį vidurkį.

a) $2x^2 + 13x + 6 < 0$; b) $-2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0$;

c) $2x(4x+1) \leqslant 21$; d) $-x(4x+1) > -33$;

e) $(2x+3)(2-x) > 3$; f) $3x^2 + 40 \leqslant 33 - x(x-11)$.

Skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ aritmetinis vidurkis:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$



$\begin{cases} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) \leqslant 0 \end{cases}$ $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

357. Išspręskite nelygybę.

a) $\frac{9x^2-4}{4} \geqslant 3$; b) $\frac{x^2-5}{5} < 4$;

c) $\frac{4x^2-3x}{3} > \frac{x^2+5x}{2}$; d) $\frac{4x(x-1)}{3} - 1 \leqslant 0$;

e) $\frac{x^2+x}{2} - \frac{8x-7}{3} < 0$; f) $x(10x-9) \leqslant \frac{4x^2-1}{3}$;

g) $\frac{x^2-1}{2} - 11x \geqslant 11$; h) $\frac{x(x+1)}{3} + \frac{8+x}{4} > 2$.

358. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys turi prasmę?

a) $\sqrt{(2x-1)(1+5x)}$; b) $\sqrt{-x^2 - 3x + 28}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{100-9x^2}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{162x^2-8}}$;

e) $\frac{x+2}{\sqrt{-17x+3x^2}}$; f) $\frac{x}{\sqrt{5x^2+42x}}$.

359. Išspręskite nelygybę.

a) $4x^2 - 20x + 25 \leqslant 0$; b) $-x^2 + 6x - 9 \geqslant 0$;

c) $(x+7)^2 + 6 > 0$; d) $-(3x-1)^2 - 10 < 0$;

e) $x^2 + 4x + 10 < 0$; f) $-x^2 - 8x - 23 > 0$.

360. Stačiojo trikampio vienas statinis 31 cm ilgesnis už kitą. Koks turi būti trumpesniojo statinio ilgis, kad trikampio plotas būtų ne didesnis už 180 cm^2? Kiek natūraliųjų sprendinių turi šis uždavinys?

361. Ūkininkas pievoje nori aptverti stačiakampio formos sklypą. Tvora turi būti 630 m ilgio, o aptverto sklypo plotas — ne mažesnis už 2,45 ha. Kokio ilgio turėtų būti to sklypo kraštai?

$P = 630$ m
$S \geqslant 2{,}45$ ha

1 ha = 10 000 m^2

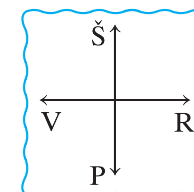




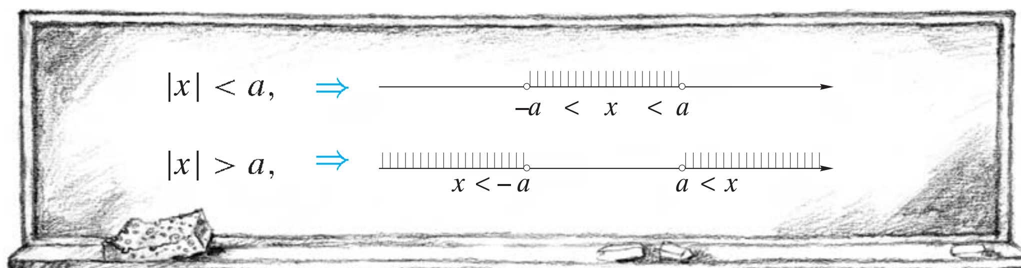
362. Baseino talpa yra 6000 litrų. Kiek litrų vandens pribėga į baseiną per vieną valandą, jei per 5 valandas pripildoma daugiau kaip pusė baseino, o per 6 valandas baseinas dar nebūna pilnas?



363. Iš stovyklavietės išėjo dvi turistų grupės: viena ėjo šiaurės, o kita — rytų kryptimi. Pirmoji grupė ėjo 4 km/h, o antroji — 5 km/h greičiu. Viena su kita jos palaikė ryšį radijo bangomis, tačiau kalbėtis galėjo tol, kol atstumas tarp jų buvo ne didesnis negu 13 km. Kiek laiko nuo antrosios grupės išėjimo buvo galima palaikyti ryšį, jeigu ji išėjo 2 valandomis vėliau už pirmąją?



Nelygybės su moduliais



364. Išspręskite nelygybę.

a) $|x| \leqslant 7$; b) $|x-2| < 1$; c) $|x+4| \leqslant 5$; d) $|3-x| < 4$.

Išspręskime nelygybę $|2x-1| \leqslant 3$.

I būdas.

$-3 \leqslant 2x-1 \leqslant 3, \quad |+1,$

$-2 \leqslant 2x \leqslant 4, \quad |:2,$

$-1 \leqslant x \leqslant 2.$

II būdas.

1) $\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1 \leqslant 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 2; \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$

2) $\begin{cases} 2x-1 < 0, \\ -2x+1 \leqslant 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x \geqslant -1; \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right).$

Abiejų sistemų sprendinių visuma yra duotosios nelygybės sprendiniai.

Atsakymas. $x \in [-1; 2]$.

365. Išspręskite nelygybę.

a) $|x| > 5$; b) $|x+1| \geqslant 3$; c) $|x-2| > 4$;

d) $|5-x| \geqslant 1$; e) $|x+2|-3 \geqslant 0$; f) $7-|5-x| < 0$;

g) $5+|3-4x| > 0$; h) $|x+1|+2 \leqslant 0$; i) $1-|3-2x| \geqslant 0$.

Išspręskime nelygybę $|2x-1| \geqslant 3$.

I būdas.

1) $2x-1 \leqslant -3$, $2x \leqslant -2$, $x \leqslant -1$.

2) $2x-1 \geqslant 3$, $2x \geqslant 4$, $x \geqslant 2$.

II būdas.

1) $\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1 \geqslant 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \geqslant 2; \end{cases} \Rightarrow x \in [2; +\infty).$

2) $\begin{cases} 2x-1 < 0, \\ -2x+1 \geqslant 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x \leqslant -1; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -1].$

Atsakymas. $x \in (-\infty; -1]$, $[2; +\infty)$.

366. Išspręskite nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} 2x-5 > 1, \\ |x-1| < 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |2+x| > 4, \\ x+3 \geqslant 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x+3 > x, \\ |6-x| \leqslant 1. \end{cases}$

Trupmeninės nelygybės

Mokėmės spręsti nelygybes $f(x) \cdot g(x) \gtrless 0$.
Tokios nelygybės sprendžiamos remiantis sandaugos savybėmis, pavyzdžiui:

$$f(x) \cdot g(x) > 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Panašiai sprendžiamos ir nelygybės

$$\frac{f(x)}{g(x)} \gtrless 0.$$

Nelygybės, kurias galima užrašyti $\frac{f(x)}{g(x)} \gtrless 0$, čia $f(x)$ ir $g(x)$ yra reiškiniai, vadinamos ***trupmeninėmis*** (racionaliosiomis) ***nelygybėmis***.

Trupmeninės nelygybės sprendžiamos remiantis trupmenos (dalmens) savybėmis, pavyzdžiui:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

367. Nustatykite x reikšmes, su kuriomis trupmenos

a) $\frac{x}{x-3}$; b) $\frac{x+3}{x-3}$; c) $\frac{x^2+2x}{x^2-9}$; d) $\frac{5}{36-x^2}$

reikšmės yra: 1) teigiamos; 2) neteigiamos; 3) neigiamos.

368. Išspręskite nelygybę.

a) $\frac{x+1}{x-5} > 0$; b) $\frac{3-x}{x+2} \leqslant 0$; c) $\frac{x^2-5x}{2+x} < 0$; d) $\frac{x^2-5x-14}{x^2-9} \geqslant 0$;

e) $\frac{8}{x-8} > 0$; f) $\frac{-4}{16-x^2} \leqslant 0$; g) $\frac{x^2+7x+10}{5x^2-3x-2} \geqslant 0$.

369. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys turi prasmę?

a) $\sqrt{\frac{x+2}{x+6}}$; b) $\sqrt{\frac{5+x}{1-x}}$; c) $\sqrt{\frac{1}{x^2-x-20}}$; d) $\sqrt{\frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9}}$.

Išspręskime nelygybę $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \geqslant 0$.

Nelygybės sprendinius randame išsprendę dvi nelygybių sistemas:

1) $\begin{cases} (x+3)(x-5) \leqslant 0, \\ x+1 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-3; 5], \\ x \in (-\infty; -1); \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; -1);$

2) $\begin{cases} (x+3)(x-5) \geqslant 0, \\ x+1 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3], [5; +\infty), \\ x \in (-1; +\infty); \end{cases} \Rightarrow x \in [5; +\infty).$

Atsakymas. $x \in [-3; -1)$, $[5; +\infty)$.

370. Kateris upe nuplaukė 22,5 km prieš srovę ir grįžo atgal. Upės tėkmės greitis lygus 3 km/h. Koks galėjo būti katerio savasis greitis, jei žinoma, kad kelionėje jis užtruko ne daugiau kaip 4 valandas?

TESTAS

371. Kurie iš skaičių -4; -3; 0; 1 yra nelygybių sistemos $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x-1<0 \end{cases}$ sprendiniai?

A -4; 0; 1 **B** -3; 0; 1 **C** -3; 0 **D** -4; 1

372. Nelygybių sistemos $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x<1 \end{cases}$ mažiausias sveikasis sprendinys yra:

A -2 **B** -1 **C** 0 **D** 1

373. Nelygybių sistemos $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x<-1 \end{cases}$ didžiausias sveikasis sprendinys yra:

A -1 **B** 2 **C** 3 **D** -2

374. Nelygybių sistemos $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x<4 \end{cases}$ sveikųjų sprendinių suma lygi:

A 4 **B** 0 **C** 1 **D** -1

375. Nelygybių sistemos $\begin{cases} 2x \geqslant 0, \\ -x<3 \end{cases}$ sprendiniai $x \in$

A $[0; 3)$ **B** $[0; +\infty)$ **C** $(-3; +\infty)$ **D** $(-\infty; 0]$

376. Reiškinys $\sqrt{5+x}+\sqrt{x-1}$ turi prasmę, kai x priklauso intervalui:

A $[-5; 1]$ **B** $[1; +\infty)$ **C** $[-5; +\infty)$ **D** $[-1; 5]$

377. Nelygybės $-3<x \leqslant 7$ sveikųjų sprendinių skaičius yra lygus:

A 11 **B** 9 **C** 8 **D** 10

378. Nelygybės $-2 \leqslant -x<3$ sprendiniai priklauso intervalui:

A $[2; 3)$ **B** $(-3; 2]$ **C** $[-2; 3)$ **D** $[-2; 3]$

379. Jei $-2<x+1 \leqslant 5$, tai:

A $x \in (-2; 5]$ **B** $x \in (-1; 6]$ **C** $x \in (-3; 4]$ **D** $x \in (-1; 4]$

380. Su kuria a reikšme nelygybių sistema $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x<a \end{cases}$ turi:

a) lygiai keturis sveikuosius sprendinius? **A** 3 **B** 4 **C** 5

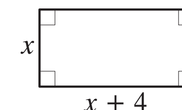
b) vienintelį sveikąjį sprendinį? **A** 0 **B** 2 **C** 1

381. Su kuria a reikšme skaičius -4 yra didžiausias sveikasis nelygybių sistemos $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x \leqslant a \end{cases}$ sprendinys?

A -2 **B** -5 **C** -4 **D** -3

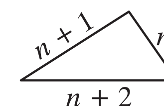
$\begin{cases} f(x) \leqslant 0 \\ g(x) \leqslant 0 \end{cases}$ $ax^2+bx+c \leqslant 0$

382. Su kuria sveikąja x reikšme stačiakampio perimetras $12<P<18$?



A 5 **B** 4 **C** 2 **D** 6

383. Su kuria natūraliąja n reikšme trikampio perimetro P reikšmės priklauso intervalui $(6; 12)$?



A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

384. Koks yra didžiausias natūralusis skaičius n, su kuriuo atkarpos AB ilgis ne didesnis už atkarpos CD ilgį, o tų atkarpų ilgių suma mažesnė už 20?



A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7

385. Kuris skaičius nėra nelygybės $x^2+4x-12>0$ sprendinys?

A 3 **B** 2 **C** -7 **D** 4

386. Kurią nelygybę sprendžiant galima gauti tokias dvi nelygybių sistemas?

a) $\begin{cases} x<4, \\ x<-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ x>-2. \end{cases}$

A $(x+4)(x-2)>0$ **B** $(x-4)(x+2)<0$ **C** $(x-4)(x+2)>0$

b) $\begin{cases} x>1, \\ x<-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ x>-3. \end{cases}$

A $(x+1)(x-3)<0$ **B** $(x-1)(x+3)>0$ **C** $(x-1)(x+3)<0$

387. Mažiausias natūralusis nelygybės $(x-1)(x-2)>0$ sprendinys yra:

A $x=1$ **B** $x=2$ **C** $x=3$ **D** $x=4$

388. Didžiausias sveikasis nelygybės $x^2+7x<0$ sprendinys yra:

A 0 **B** 7 **C** 6 **D** -1

389. Nelygybė $(x-5)^2 \geqslant 0$ teisinga, kai:

A $x \in (-\infty; 5]$ **B** $x>5$ **C** x — bet kuris skaičius

390. Nelygybė $(x+1)^2 \leqslant 0$ teisinga, kai:

A $x>-1$ **B** $x=-1$ **C** x — bet kuris skaičius

PASITIKRINAME

391. Išspręskite nelygybę.

a) $2(3x+1)-1<7+8x$; b) $4-12x\geqslant -2(x+1)$;

c) $\frac{2x-1}{3}\geqslant 1$; d) $\frac{3x+1}{4}\leqslant 10$;

e) $\frac{x-1}{3}-x>\frac{x+1}{2}$; f) $\frac{x+1}{3}-\frac{x+2}{6}\leqslant\frac{x+3}{2}$.

392. Kurie iš skaičių -7; 0; 3 yra nelygybių sistemos sprendiniai?

a) $\begin{cases}2x-4<-3,\\ 8+x\geqslant 0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}4x+28>-1,\\ 2-3x<24;\end{cases}$ c) $\begin{cases}-4x+17\geqslant 5,\\ 31-15x<-13.\end{cases}$

393. Nelygybių sistemos sprendinius pavaizduokite skaičių tiesėje ir užrašykite intervalu.

a) $\begin{cases}x>-1,\\ x\leqslant 3;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x<7,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x>2;\end{cases}$ d) $\begin{cases}x\leqslant 4,\\ x<-2.\end{cases}$

394. Išspręskite nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases}4-2x>x-1,\\ 2-3x<6-x;\end{cases}$ b) $\begin{cases}12-6x>3-7x,\\ 5x+1\leqslant 3-2x;\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x+8>3x+1,\\ 7x-10<4x+6;\end{cases}$ d) $\begin{cases}-4x+16>2x-20,\\ 2x-3\geqslant 5x-15;\end{cases}$

e) $\begin{cases}16-6x<2(x-8),\\ 5x-1\geqslant 3(2-x);\end{cases}$ f) $\begin{cases}-2(3x+1)<7-3x,\\ 1-2x\geqslant 4x-1;\end{cases}$

g) $\begin{cases}\frac{x+2}{3}>4,\\ -2x\leqslant x-3;\end{cases}$ h) $\begin{cases}4+x>-(x+3),\\ \frac{5-x}{4}\geqslant -1.\end{cases}$

395. Išspręskite dvigubąją nelygybę. Atsakymą užrašykite intervalu.

a) $-1<x+3\leqslant 5$; b) $-3<2x+1\leqslant 4$;

c) $-2<6-x<7$; d) $0\leqslant 3-2x<3$;

e) $-7\leqslant -3x+1\leqslant 2{,}5$; f) $0{,}8<4-6x\leqslant 8{,}2$.

396. a) Su kuriomis a reikšmėmis dvinario $2a+7$ reikšmės priklauso intervalui $(-4; 1]$?

b) Su kuriomis a reikšmėmis dvinario $10-3a$ reikšmės priklauso intervalui $[-2; 5)$?

c) Su kuriomis b reikšmėmis trupmenos $\frac{2b-1}{4}$ reikšmės priklauso intervalui $[-3; 0]$?

d) Su kuriomis b reikšmėmis trupmenos $\frac{7-3b}{2}$ reikšmės priklauso intervalui $(-6; 2)$?

$\begin{cases}f(x)\leqslant 0\\ g(x)\leqslant 0\end{cases}$ $ax^2+bx+c\leqslant 0$

397. a) Prie natūraliojo skaičiaus pridėjus dvigubai didesnį už jį skaičių, gaunamas skaičius yra didesnis už 15, bet mažesnis už 27. Raskite visus tokius skaičius.

b) Iš natūraliojo skaičiaus atėmus jo pusę, gaunamas skaičius yra didesnis už 15, bet ne didesnis už 17. Raskite visus tokius skaičius.

398. 1) Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio reikšmė yra teigiama?

a) $x(x+7)$; b) $x(9-2x)$; c) $(x-2)(x+11)$;

d) $2x(3-x)$; e) $-x(1-4x)$; f) $(x+2{,}5)(3-x)$.

2) Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio reikšmė yra neigiama?

a) $x(5+x)$; b) $x(7-2x)$; c) $(4-x)(x+1)$;

d) $-x(7-x)$; e) $2x(3x-1)$; f) $(x-5{,}7)(6+x)$.

399. Išspręskite kvadratinę nelygybę.

a) $x^2-8x>0$; b) $4x-x^2\leqslant 0$; c) $3x^2-10x>0$;

d) $x^2-1<0$; e) $16-x^2\geqslant 0$; f) $25x^2-9\leqslant 0$;

g) $x^2+7x+12\geqslant 0$; h) $x^2-2x-35<0$; i) $3x^2-8x+5>0$.

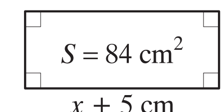
400. Raskite didžiausią natūralųjį nelygybės sprendinį.

a) $2x>x^2$; b) $-x^2\geqslant -3x$; c) $\frac{x^2}{2}<5x$;

d) $x^2\leqslant 25$; e) $9>x^2$; f) $\frac{x^2}{8}\leqslant 2$;

g) $x^2-48<-2x$; h) $5x+4>1{,}5x^2$; i) $-\frac{5}{2}x^2\geqslant -4{,}5x-1$.

401. Stačiakampio ilgis 5 cm didesnis už plotį. Koks turi būti jo plotis, kad stačiakampio plotas būtų ne didesnis už 84 cm^2?

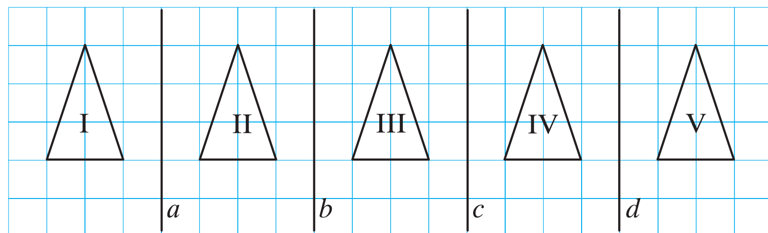


402. Autobusas važiuoja pastoviu greičiu. Jeigu jis padidintų greitį 15 km/h, tai per dvi valandas nuvažiuotų daugiau kaip 150 km. Jeigu jo greitis sumažėtų 15 km/h, tai per 3 valandas nuvažiuotų mažiau kaip 180 km. Kokiu greičiu važiuoja autobusas?

403. a) Prie sugalvoto skaičiaus n pridėjus jo kvadratą, gaunamas skaičius yra ne didesnis už 6. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes.

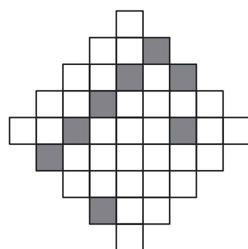
b) Iš sugalvoto skaičiaus n kvadrato atėmus trigubą sugalvotą skaičių, gaunamas skaičius yra didesnis už 10. Raskite mažiausią natūraliąją n reikšmę.

404. Išvardykite trikampių, simetriškų kiekvienos iš tiesių a, b, c, d atžvilgiu, poras.

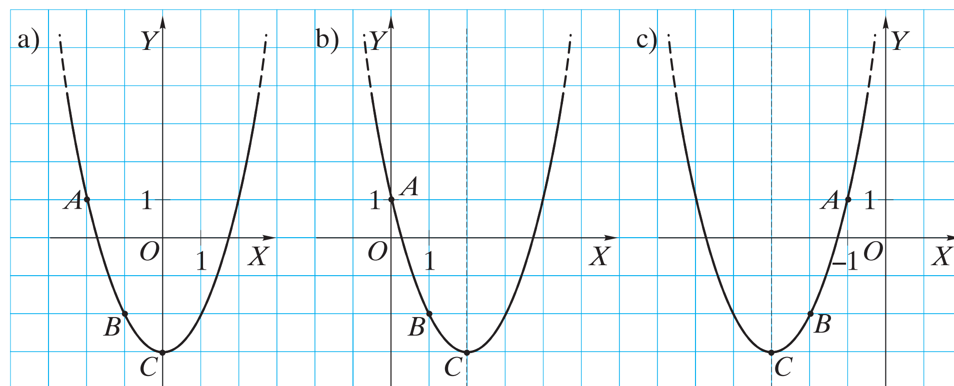


405. Kiek mažiausiai baltų kvadratėlių reikia nuspalvinti, kad figūra pasidarytų simetriška kurios nors tiesės atžvilgiu?

A 4 **B** 5 **C** 2 **D** 3



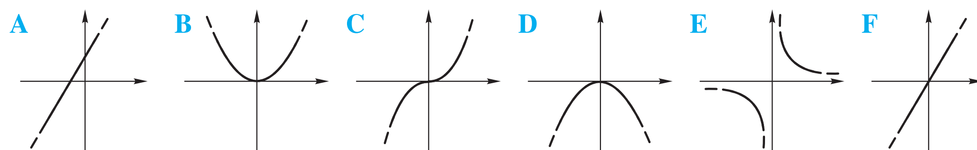
406. Persibraižykite brėžinį į sąsiuvinį. Jame pažymėkite taškus A_1, B_1, C_1, atitinkamai simetriškus taškams A, B, C parabolės simetrijos ašies atžvilgiu. Užrašykite taškų A ir A_1, B ir B_1, C ir C_1 koordinates.



407. Pavaizduoti šešių reiškinių

$f(x) = 3x$, $g(x) = 3x + 2$, $h(x) = x^2$, $l(x) = x^3$, $t(x) = \frac{3}{x}$, $m(x) = -3x^2$

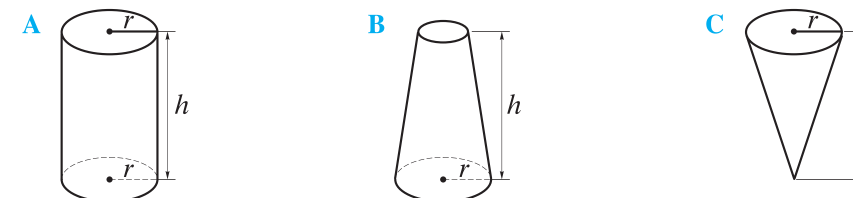
grafikai.



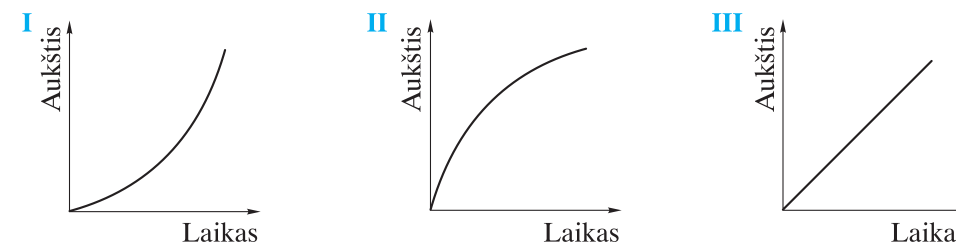
Kuriame paveikslėlyje kurio reiškinio grafikas pavaizduotas?

408. Koordinačių plokštumoje OXY nubraižykite:
a) tiesę $y = 2x$; b) tiesę $y = 2$; c) tiesę $x = 2$;
d) parabolę $y = x^2$; e) kubinę parabolę $y = -x^3$;
f) hiperbolę $y = \frac{4}{x}$; g) kvadratinės šaknies $y = \sqrt{x}$ grafiką.

409. Į tris pavaizduotus indus vienoda srove vienu metu pradedama pilti vandenį.

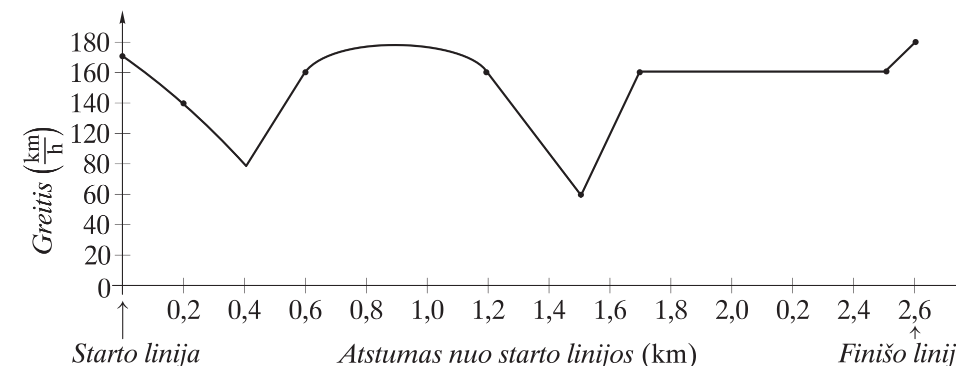


Iš grafikų matyti, kaip kito vandens aukštis kiekviename inde:



Kuris grafikas kurį indą atitinka?

410. Lenktynininkas žiedine trasa apvažiavo 3 ratus. Iš grafiko matyti, kaip kito automobilio greitis, važiuojant antrąjį trasos ratą.

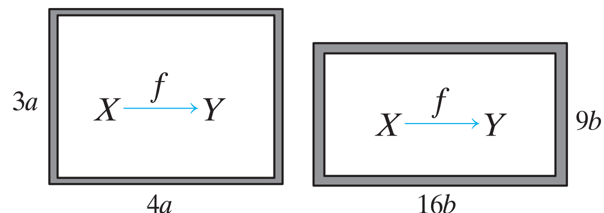


1) Koks yra vieno rato ilgis? Kokį atstumą nuvažiavo lenktynininkas iš viso?
2) Kokį atstumą nuo lenktynių pradžios jau buvo nuvažiavęs automobilis, kai antrajame rate buvo užfiksuotas mažiausias to rato greitis?
3) Kokį atstumą antrajame trasos rate lenktynininkas nuvažiavo pastoviu greičiu? mažindamas greitį? didindamas greitį?

Atstumas iki televizoriaus

Televizorių ekranai yra dvejopi:

- standartiniai — jų ilgio ir pločio santykis lygus 4 : 3,
- plačiaekraniai — jų ilgio ir pločio santykis lygus 16 : 9.



Raskite abiejų pavaizduotų TV ekranų įstrižainių ilgius.

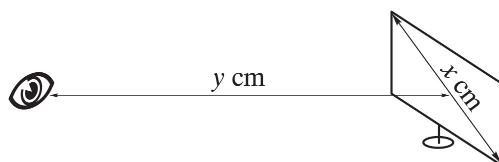
Atstumas y, iš kurio rekomenduojama žiūrėti TV, priklauso nuo jo įstrižainės ilgio x.

1 lentelė. 4 : 3 TV

x (cm) =	40	50	60	70	80	90
y (cm) =	160	200	240	280	320	360

2 lentelė. 16 : 9 TV

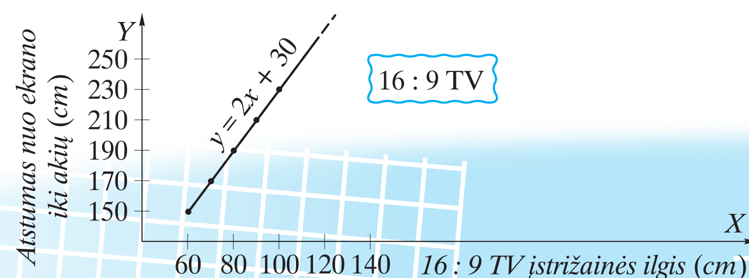
60	70	80	90	100	110	120	= x (cm)
150	170	190	210	230	250	270	= y (cm)



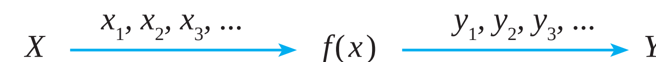
Užduotis.

1) Užrašykite reiškinį $f(x)$, kuriuo remiantis būtų galima apskaičiuoti atstumą $y = f(x)$ nuo 4 : 3 TV ekrano iki akių, žinant ekrano įstrižainės ilgį x.
2) Koordinačių plokštumoje sužymėkite 1 lentelės duomenis atitinkančius taškus $(x; y)$ ir nubrėžkite reiškinio $f(x)$ grafiką $y = f(x)$.

Antroji lentelė sudaryta remiantis reiškiniu $g(x) = 2x + 30$.
Iš tikrųjų $g(60) = 2 \cdot 60 + 30 = 150$, $g(70) = 2 \cdot 70 + 30 = 170$, ...



3) Ar egzistuoja toks standartinis ir toks plačiaekranis televizoriai, kurių įstrižainės yra vienodo ilgio ir kuriuos rekomenduojama žiūrėti iš to paties atstumo?



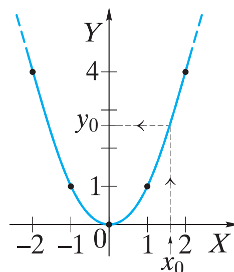
- Susipažinsime su matematikoje dažnai vartojama sąvoka – fùnkcija.
- Mokysimės skaityti ir braižyti įvairių funkcijų grafikus.
- Nagrinėsime funkcijų savybes.
- Daug dėmesio skirsime kvadratinei funkcijai.

5.1. DVIEJŲ DYDŽIŲ FUNKCINĖ PRIKLAUSOMYBĖ

Užduotis. Nagrinėkime skaičių y priklausomybę nuo skaičių x, kai y reikšmės gaunamos x reikšmes keliant kvadratu.

Sakoma: Kintamasis y priklauso nuo kintamojo x.

Šią kintamojo y priklausomybę nuo kintamojo x galima ne tik *nusakyti žodžiais*, bet ir nurodyti *lentele*, *formule* ir *grafiku*:



$x =$	...	−2	...	−1	...	0	...	1	...	2	...
$y =$	...	4	...	1	...	0	...	1	...	4	...

x^2 $y = x^2$

1) Kam lygi y reikšmė, kai $x = -3$? $x = \frac{1}{2}$? $x = \sqrt{5}$?
2) Perskaitę lentoje surašytą informaciją, pasakykite, ką vadiname funkcija.

Kintamojo y priklausomybė nuo kintamojo x, kai kiekvienai galimai x reikšmei pagal kokią nors taisyklę priskiriama vienintelė y reikšmė, vadinama ***fùnkcine priklausomýbe***, arba ***fùnkcija***.

Vaizduojama: $X \xrightarrow{f} Y$ arba $f\colon X \to Y$

Rašoma: $y = f(x)$.

Sakoma: Funkcija ygrek lygu ef nuo iks.

Vadinama:
- x — funkcijos nepriklausomuoju kintamuoju, arba funkcijos argumentu,
- y — funkcijos priklausomuoju kintamuoju, arba funkcijos reikšme,
- X — visų galimų x reikšmių aibe, arba funkcijos apibrėžimo sritimi,
- Y — visų galimų y reikšmių aibe, arba funkcijos reikšmių sritimi,
- f — taisykle, pagal kurią x reikšmėms priskiriamos y reikšmės.

Kintamojo y funkcinė priklausomybė nuo kintamojo x gali būti:
- nusakyta žodžiais,
- surašyta x ir y reikšmių lentele,
- užrašyta reiškiniu $f(x)$,
- pavaizduota grafiku.

3) Užrašykite funkcijos $y = f(x)$, kai $f(x) = x^2$, apibrėžimo sritį; reikšmių sritį.

x reikšmės, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę, sudaro funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį. ⟶ $x \in (\ldots; \ldots)$

y reikšmės, kurias įgyja reiškinys $f(x)$, sudaro funkcijos $y = f(x)$ reikšmių sritį. ⟶ $y \in [\ldots; \ldots)$

411. Kintamojo y priklausomybė nuo kintamojo x nusakyta žodžiais.
a) Skaičių y gauname skaičių x padauginę iš 2 ir prie sandaugos pridėję 1.
b) Kvadrato kraštinės ilgį y gauname iš kvadrato ploto x ištraukę kvadratinę šaknį.
1) Užrašykite funkciją $y = f(x)$. 2) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką.

Koordinačių plokštumos taškų $(x; y)$ visuma, čia $y = f(x)$, vadinama funkcijos $y = f(x)$ grafiku.

3) Užrašykite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį; reikšmių sritį.

412. Funkcijos $y = f(x)$ vìsos nepriklausomojo kintamojo x ir jas atitinkančios priklausomojo kintamojo y reikšmės surašytos lentelėje.

a)

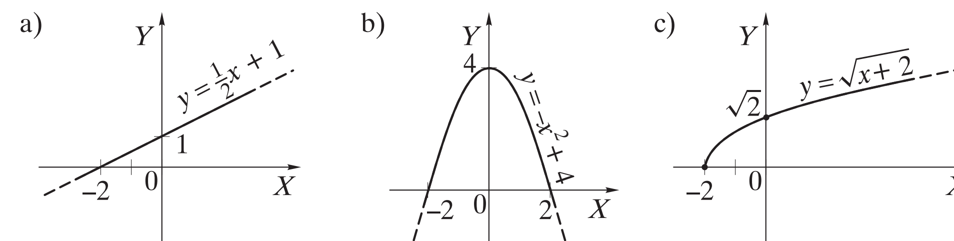
$x =$	1	2	3	4	5
$y =$	2	4	6	8	10

b)

$x =$	−3	−2	−1	1	2
$y =$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−1	1	$\frac{1}{2}$

1) Pasakykite, kokia yra funkcijos apibrėžimo sritis; reikšmių sritis.
2) Užrašykite funkcijos reiškinį $f(x)$.

413. Pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.



1) Nustatykite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį; reikšmių sritį.
2) Kam lygi y reikšmė, kai $x = 0$? $x = -2$? $x = 4$?
3) Su kuriomis x reikšmėmis $y = 0$? $y = 4$? $y = -5$?

414. Funkcijos $y = f(x)$ reiškinys yra:

a) $f(x) = x^2 + 5$; b) $f(x) = \frac{2}{x}$; c) $f(x) = \frac{x}{2} - 1$;
d) $f(x) = \frac{2}{x-1}$; e) $f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$; f) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$;
g) $f(x) = \sqrt{x+5}$; h) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$; i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

1) Kam lygi funkcijos reikšmė y, kai $x = 3$? $x = -1$?
2) Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį.

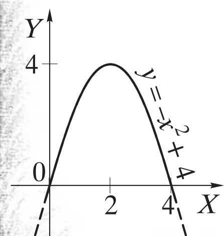
Užrašykime funkcijos $y = f(x)$, čia $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x}$, apibrėžimo sritį.
Apibrėžimo sritis yra visi skaičiai, išskyrus 0 ir −2. Iš tikrųjų funkcijos reiškinys $\frac{x+3}{x^2+2x}$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis, išskyrus tas, su kuriomis vardiklis lygus nuliui:
$x^2 + 2x = 0$, kai $x(x+2) = 0$, ⇒ $\underline{x = 0}$, arba $x + 2 = 0$, $\underline{x = -2}$.
Atsakymas. $x \in (-\infty; -2), (-2; 0), (0; +\infty)$.

5.2. FUNKCIJŲ SAVYBĖS

Apibūdinti funkciją (nusakyti jos savybes) patogu remiantis funkcijos grafiku.

Funkcijos $y = -x^2 + 4x$:

grafikas



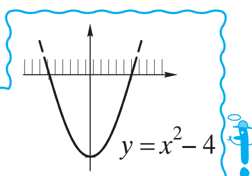
savybės

- apibrėžimo sritis $x \in (-\infty; +\infty)$;
- reikšmių sritis $y \in (-\infty; 4]$;
- reikšmės yra teigiamos ($y > 0$), kai $x \in (0; 4)$;
- reikšmės yra neigiamos ($y < 0$), kai $x \in (-\infty; 0)$, $(4; +\infty)$;
- reikšmės lygios nuliui ($y = 0$), kai $x = 0$, $x = 4$;
- reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; 2)$;
- reikšmės mažėja, kai $x \in (2; +\infty)$;
- didžiausia reikšmė lygi 4 ($y = 4$), kai $x = 2$;
- mažiausios reikšmės nėra.

Užduotis. Naudodamiesi funkcijos $y = f(x)$, čia

$$f(x) = x^2 - 4,$$

grafiku, nustatykite:



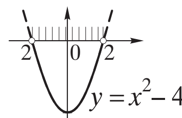
1) funkcijos reikšmių sritį;

Apibrėžimo sritis: $x \in (-\infty; +\infty)$

$y=x^2-4$

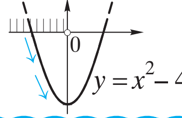
2) x reikšmes, su kuriomis funkcijos reikšmės yra teigiamos ($y > 0$);

Funkcijos reikšmės (y reikšmės) yra neigiamos su tomis x reikšmėmis, su kuriomis grafikas yra žemiau OX ašies. Vadinasi, $y < 0$, kai $x \in (-2; 2)$.



3) funkcijos reikšmių didėjimo intervalą, t. y. x reikšmių intervalą, kuriame, x reikšmėms didėjant, y reikšmės didėja;

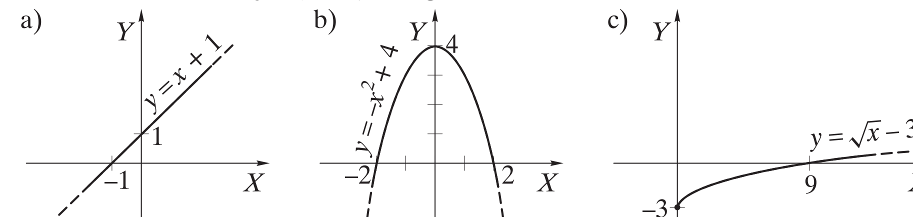
Funkcijos reikšmės mažėja, kai, einant iš kairės į dešinę, grafikas leidžiasi žemyn. Vadinasi, y reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$.



4) mažiausią funkcijos reikšmę (y reikšmę) ir ją atitinkančią x reikšmę.

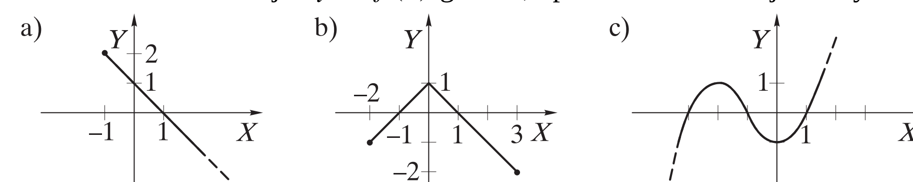
Funkcija $y = x^2 - 4$ didžiausios reikšmės neturi.

415. Pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.



Naudodamiesi juo, nustatykite:
1) funkcijos apibrėžimo sritį; reikšmių sritį;
2) x reikšmes, su kuriomis y reikšmės yra teigiamos; neigiamos; lygios 0;
3) sprendinius nelygybės: $x + 1 \leqslant 0$; $-x^2 + 4 \geqslant 0$; $\sqrt{x} - 3 \leqslant 0$.
4) x reikšmių intervalą, kuriame y reikšmės didėja; mažėja;
5) ar funkcija turi didžiausią reikšmę; mažiausią reikšmę. Jei turi, tai nustatykite tą reikšmę ir ją atitinkančią x reikšmę.

416. Naudodamiesi funkcijos $y = f(x)$ grafiku, apibūdinkite funkcijos savybes.

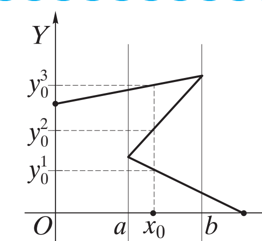


417. Nubraižykite kokios nors funkcijos grafiką, jei žinoma, kad tos funkcijos:

a) • apibrėžimo sritis yra $x \in (-\infty; +\infty)$, reikšmių sritis yra $y \in (-\infty; 6]$,
   • reikšmės yra teigiamos, kai $x \in (1; 5)$,
   • reikšmės didėja intervale $x \in (-\infty; 3)$;

b) • apibrėžimo sritis yra $x \in [-10; 8)$, reikšmių sritis yra $y \in (-8; 10]$,
   • reikšmės lygios 0, kai $x = 0$ ir $x = 2$.

Ne kiekviena koordinačių plokštumos kreivė yra kokios nors funkcijos grafikas. Pavyzdžiui, dešinėje pavaizduota kreivė nėra funkcijos grafikas, nes ne su kiekviena x reikšme y reikšmė yra vienintelė. Iš tikrųjų kiekvieną $x \in (a; b)$ reikšmę atitinka trys y reikšmės, o reikšmes $x = a$ ir $x = b$ atitinka po dvi y reikšmės.



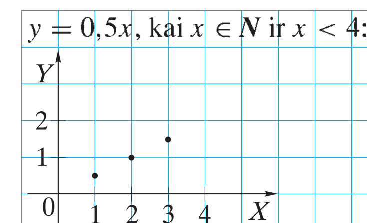
418. Nubraižykite funkcijos $y = 2x$ grafiką, kai:

a) $x \in (-\infty; +\infty)$;

b) $x \in \mathbf{N}$ ir $x \leqslant 4$;

c) $x \in [-2; 3)$;

d) $x \in \mathbf{Z}$ ir $-3 \leqslant x < 2$.

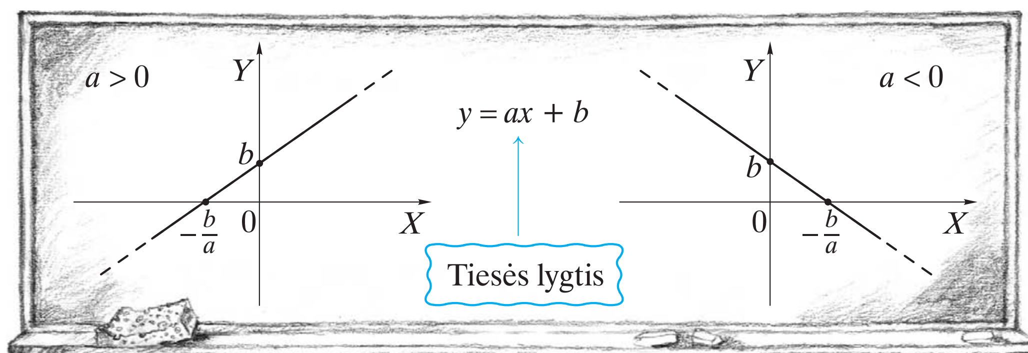


5.3. FUNKCIJOS $y = ax + b$

Funkcijos

$$y = ax + b \quad \text{(čia } a \text{ ir } b \text{ — skaičiai)}$$

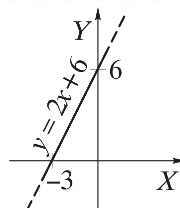
grafikas yra ***tiesė***.



1 užduotis. Įsitikinkite, kad tiesė $y = ax + b$:

1) OY ašį kerta taške $(0; b)$;
2) OX ašį kerta taške $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Tiesė $y = 2x + 6$:
- OY ašį kerta taške, kurio koordinatė x lygi 0, o $y = 2 \cdot 0 + 6, \Rightarrow y = 6$;
- OX ašį kerta taške, kurio koordinatė y lygi 0, o $0 = 2x + 6, \Rightarrow 2x = -6, \Rightarrow x = -\frac{6}{2} = -3$.



2 užduotis.

1) Pasirinkite kokias nors a ir b reikšmes ir nubrėžkite tiesę $y = ax + b$, kai:
   a) $a > 0$; b) $a < 0$.

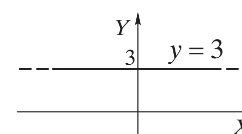
Brėžiant tiesę, pakanka apskaičiuoti dviejų tos tiesės taškų koordinates, tuos taškus pažymėti koordinačių plokštumoje ir pasinaudoti liniuote.

2) Remdamiesi grafiku, apibūdinkite funkciją $y = ax + b$, kai:
   a) $a > 0$; b) $a < 0$.

419. 1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubrėžkite tieses.
a) $y = x$, $y = -x + 6$; b) $y = -x - 1$, $y = x - 7$.
2) Apskaičiuokite perimetrą ir plotą trikampio, kurį riboja nubrėžtosios tiesės ir OX ašis; OY ašis.

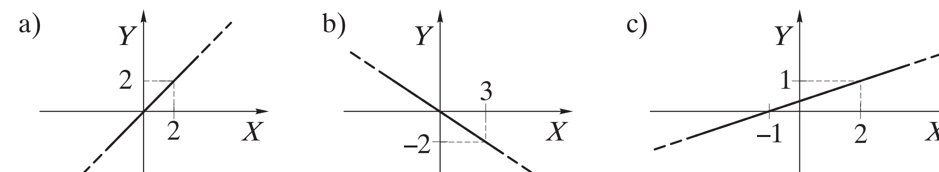
420. Nagrinėkime funkcijas $y = ax + b$, kai $a = 0$, t. y. $y = b$.
1) Nubrėžkite tieses $y = 2$, $y = -2$, $y = 0$.
2) Remdamiesi nubrėžtomis tiesėmis, apibūdinkite funkcijas $y = b$.

$y = 3$ yra tiesė, kurios visų taškų koordinatės y lygios 3.
Ta tiesė yra lygiagreti su OX ašimi ir eina per tašką (0; 3).



Funkcijos $y = f(x)$, kai $f(x) = 3$:
- apibrėžimo sritis $x \in (-\infty; +\infty)$, reikšmių sritis $y = 3$;
- funkcija yra *pastovioji* — su visomis x reikšmėmis y reikšmė yra ta pati.

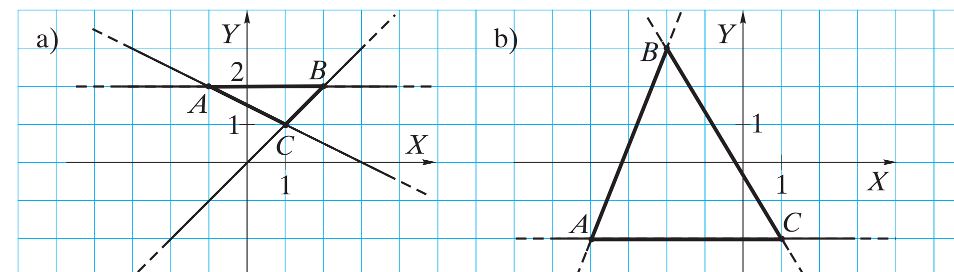
421. Pavaizduota tiesė $y = ax + b$. Nustatykite a ir b reikšmes.



1) Tiesė $y = ax + b$ eina per tašką $(-2; 0)$, todėl teisinga lygybė:
$0 = a \cdot (-2) + b, \Rightarrow -2a + b = 0$.
2) Tiesė $y = ax + b$ eina per tašką $(0; 2)$, todėl teisinga lygybė:
$2 = a \cdot 0 + b, \Rightarrow \underline{b = 2}$.
3) Iš lygybės $-2a + b = 0$, kai $b = 2$, gauname:
$-2a + 2 = 0, \Rightarrow \underline{a = 1}$.

Atsakymas. $a = 1$, $b = 2$.

422. Trikampį ABC riboja trys tiesės. Užrašykite tų tiesių lygtis ir apskaičiuokite trikampio perimetrą ir plotą.

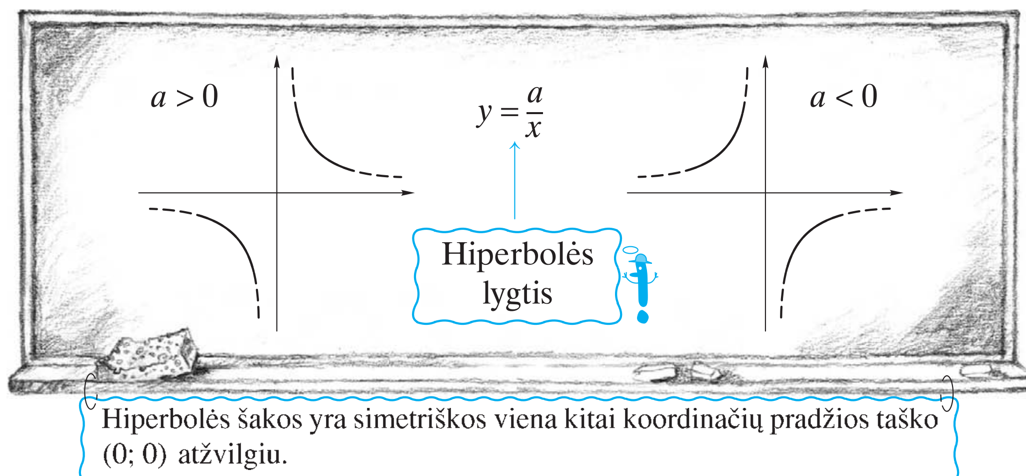


5.4. FUNKCIJOS $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$

Funkcijos

$$y=\frac{a}{x} \quad (\text{čia } a\neq 0 \text{ skaičius})$$

grafikas vadinamas ***hipèrbole***.



Hiperbolės šakos yra simetriškos viena kitai koordinačių pradžios taško (0; 0) atžvilgiu.

Užduotis. Skirtingose koordinačių plokštumose nubraižykite hiperboles

$$y=\frac{1}{x} \quad \text{ir} \quad y=-\frac{1}{x}.$$

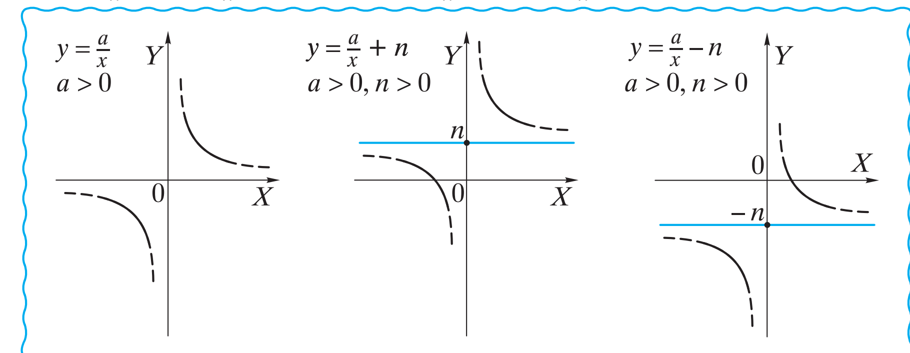
1) Užpildykite lenteles.

$x=$	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
$y=\frac{1}{x}=$						$\frac{1}{2}$		
$y=-\frac{1}{x}=$						$-\frac{1}{2}$		

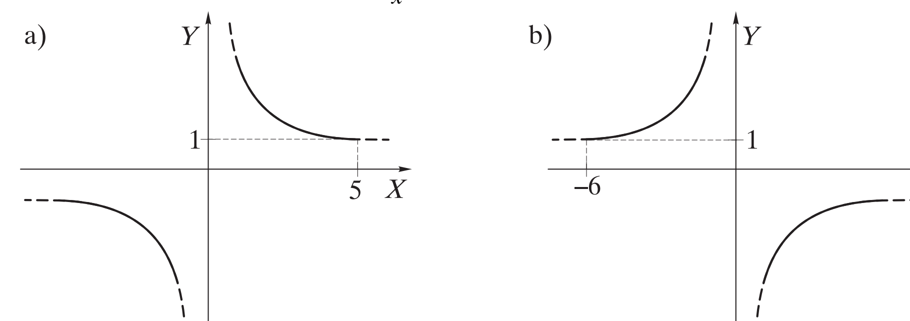
Kai $x=2$, tai: $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$.

2) Lentelių taškus sužymėkite atskirose koordinačių plokštumose ir per juos nubraižykite kreives.
3) Remdamiesi grafikais, apibūdinkite:
   a) funkcijas $y=\frac{a}{x}$, kai $a>0$;
   b) funkcijas $y=\frac{a}{x}$, kai $a<0$.
4) Kiekvienoje nubraižytoje hiperbolėje pažymėkite kokią nors porą taškų, simetriškų vienas kitam koordinačių pradžios taško (0; 0) atžvilgiu, ir užrašykite tų taškų koordinates.

423. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite dvi hiperboles ir apibūdinkite jas atitinkančias funkcijas.
a) $y=\frac{6}{x}$ ir $y=\frac{6}{x}+2$; b) $y=-\frac{6}{x}$ ir $y=-\frac{6}{x}-2$.



424. 1) Pavaizduota hiperbolė $y=\frac{a}{x}$. Nustatykite a reikšmę.



2) Per kurį iš taškų eina pavaizduotoji hiperbolė?
$A\left(3; \frac{3}{5}\right)$; $B\left(8; -\frac{3}{4}\right)$; $C(-1; 1)$; $D\left(-\frac{1}{2}; -10\right)$.

425. Apskaičiuokite koordinates taškų, kuriuose tiesė kerta hiperbolę, kai žinomos tiesės ir hiperbolės lygtys. a) $y=0{,}5x$, $y=\frac{2}{x}$; b) $y=-0{,}5x+1$, $y=-\frac{4}{x}$.

Ieškodami funkcijų $y=f(x)$ ir $y=g(x)$ grafikų bendrų taškų koordinačių:
1) sprendžiame lygtį $f(x)=g(x)$ — randame tų taškų x koordinates $(x_1, x_2, ...)$;
2) apskaičiuojame y koordinates:
$y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, ... (arba $y_1=g(x_1)$, $y_2=g(x_2)$, ...).

426. Tiesė, einanti per koordinačių pradžios tašką (0; 0), vieną hiperbolės $y=\frac{a}{x}$ šaką kerta taške: a) (2; 1); b) (3; –1); c) (–5; 2); d) (–3; –2).
1) Nustatykite koordinates taško, kuriame ta tiesė kerta kitą hiperbolės šaką.

Hiperbolės $y=\frac{a}{x}$ taškai $(m; n)$ ir $(-m; -n)$ yra simetriški vienas kitam taško (0; 0) atžvilgiu.

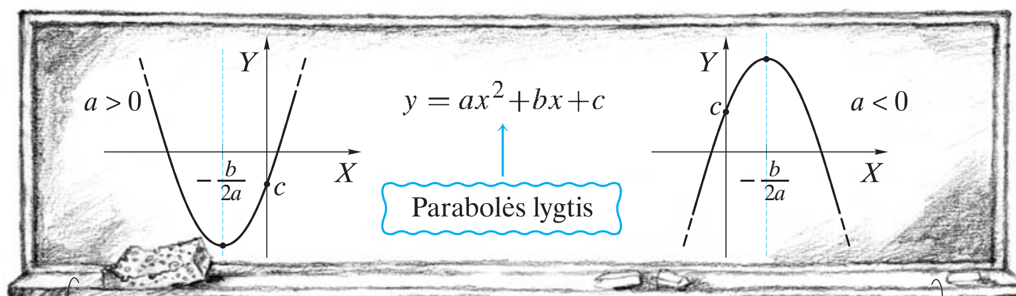
2) Užrašykite tos tiesės ir tos hiperbolės lygtis.

5.5. FUNKCIJOS $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Funkcija

$y = ax^2 + bx + c$ (čia a, b, c — skaičiai ir $a \neq 0$)

vadinama ***kvadrãtine fùnkcija***. Kvadratinės funkcijos grafikas vadinamas ***parãbole***.



Parabolės $y = ax^2 + bx + c$ šakos yra simetriškos viena kitai tiesės, statmenos OX ašiai ir einančios per tašką $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$, atžvilgiu. Tiesė $x = -\frac{b}{2a}$ vadinama parabolės *simètrijos ašimi*.

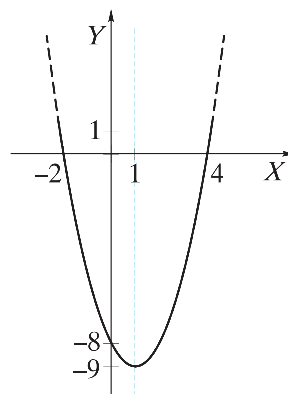
Parabolės taškas, per kurį eina jos simetrijos ašis, vadinamas ***parãbolės viršū̃ne***.

Užduotis. Pavaizduota parabolė $y = x^2 - 2x - 8$.

Remdamiesi grafiku, apibūdinkite jį atitinkančią funkciją.

1) Kokia yra funkcijos apibrėžimo sritis? reikšmių sritis?

$x \in (...; ...)$ $y \in [...; ...)$



2) Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos? neigiamos? lygios nuliui?

$y > 0$, kai $x \in (...; ...)$, $(...; ...)$.
$y < 0$, kai $x \in (...; ...)$.
$y = 0$, kai $x = ...$; $x = ...$.

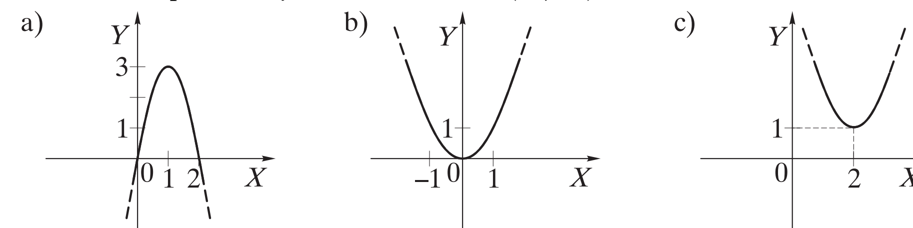
3) Kuriame x reikšmių intervale funkcijos reikšmės mažėja? didėja?

y reikšmės mažėja, kai $x \in (...; ...)$; y reikšmės didėja, kai $x \in (...; ...)$.

4) Kokią mažiausią reikšmę įgyja funkcija? Su kuria x reikšme funkcijos reikšmė yra mažiausia?

Mažiausia funkcijos reikšmė $y = ...$, kai $x = ...$.

427. Pavaizduota parabolė $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.



1) Apibūdinkite šią parabolę atitinkančią funkciją.
2) Remdamiesi grafiku, išspręskite nelygybę $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$.

428. Duota parabolės lygtis.

a) $y = x^2 + 6x + 5$; b) $y = -x^2 + 4x - 3$; c) $y = 2x^2 + 3x + 4$.

1) Kuriame taške parabolė kerta OY ašį?
2) Ar parabolė su OX ašimi turi bendrų taškų? Jei turi, tai apskaičiuokite tų taškų koordinates.

Parabolė $y = x^2 - 8x - 20$:
- OY ašį kerta taške, kuriame $x = 0$, o $y = 0^2 - 8 \cdot 0 - 20 = -20$;
- OX ašį kerta, kai $y = 0$:
  $x^2 - 8x - 20 = 0$, $\Rightarrow D = 144$, $x_1 = -2$, $x_2 = 10$.

Atsakymas. 1) $(0; -20)$; 2) $(-2; 0)$ ir $(10; 0)$.

3) Apskaičiuokite parabolės viršūnės taško koordinates.

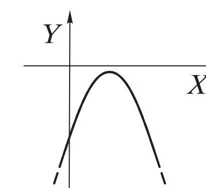
Parabolė $y = ax^2 + bx + c$ yra simetriška tiesės $x = -\frac{b}{2a}$ atžvilgiu. Vadinasi, parabolės viršūnės taško abscisė (x koordinatė) yra $-\frac{b}{2a}$, o viršūnės ordinatė (y koordinatė) yra $y = a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = ...$.

Parabolės $y = x^2 - 8x - 20$ viršūnės abscisė (x koordinatė)
$x = -\frac{-8}{2\cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$.
Viršūnės ordinatė (y koordinatė)
$y = 4^2 - 8 \cdot 4 - 20 = 16 - 32 - 20 = -36$.
Atsakymas. $(4; -36)$.

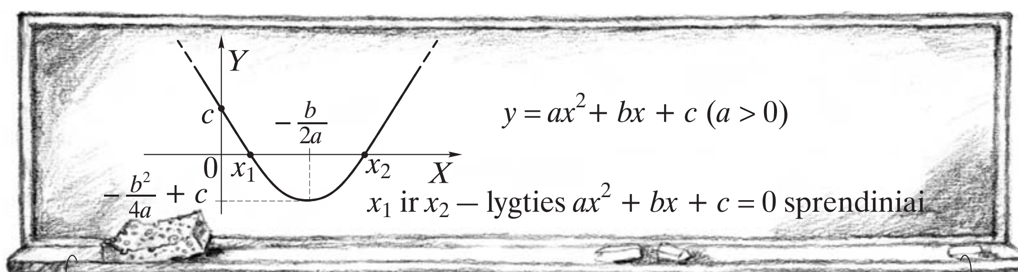
4) Į viršų ar į apačią nukreiptos parabolės šakos?

429. Kurios funkcijos grafikas pavaizduotas?

A $y = x^2 + 2x - 3$ **B** $y = -x^2 + 2x - 3$
C $y = x^2 - 2x + 3$ **D** $y = -x^2 - 2x - 3$



5.6. BRAIŽOME PARABOLĘ

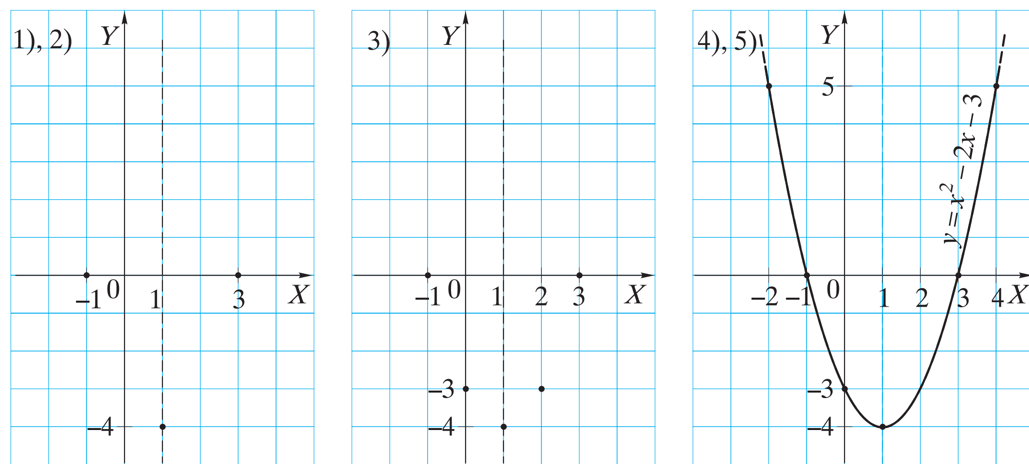


Parabolės šakos nukreiptos aukštyn, kai $a > 0$; nukreiptos žemyn, kai $a < 0$.

Užduotis. Nubraižykite parabolę $y = x^2 - 4x - 5$.

Nubraižykime parabolę $y = x^2 - 2x - 3$.

1) Apskaičiuokime koordinates taškų, kuriuose parabolė kerta OX ašį:
   $x^2 - 2x - 3 = 0$, $\Rightarrow$ $D = 16 > 0$, $\Rightarrow$ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.
   Koordinačių plokštumoje pažymėkime taškus $(-1; 0)$ ir $(3; 0)$.
2) Apskaičiuokime parabolės viršūnės koordinates:
   $x = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$, $\quad y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.
   Pažymėkime parabolės viršūnę $(1; -4)$ ir simetrijos ašį — tiesę $x = 1$.
3) Pažymėkime tašką, kuriame parabolė kerta OY ašį, t. y. tašką $(0; -3)$, ir tam taškui simetrišką tiesės $x = 1$ atžvilgiu tašką, t. y. tašką $(2; -3)$.
4) Raskime dar kokių nors parabolės taškų koordinates.
   Pavyzdžiui: kai $x = -2$, tai $y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 5$;
   kai $x = 4$, tai $y = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 5$.
   Pažymėkime tuos taškus: $(-2; 5)$, $(4; 5)$.
5) Per pažymėtus taškus nubraižykime parabolę.

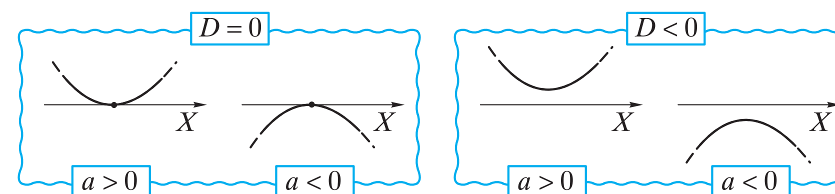


430. 1) Nubraižykite parabolę ir apibūdinkite ją atitinkančios funkcijos savybes.
a) $y = x^2 - 5x + 6$; b) $y = x^2 + 4x + 3$; c) $y = 6x^2 - 8x + 2$;
d) $y = -2x^2 - 8x - 6$; e) $y = -6x^2 + 8x - 2$; f) $y = -x^2 + 4x + 5$.

2) Remdamiesi grafiku, išspręskite nelygybę $y < 0$; $y > 0$; $y \leqslant 0$.

431. 1) Nubraižykite parabolę ir apibūdinkite ją atitinkančios funkcijos savybes.
a) $y = x^2 - 6x + 9$; b) $y = x^2 + 2x + 1$; c) $y = -2x^2 + 4x - 2$;
d) $y = -2x^2 + 2x - 2$; e) $y = x^2 - 2x + 4$; f) $y = -x^2 + 2x - 6$.

Jei lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ turi vieną sprendinį x_1, tai parabolė $y = ax^2 + bx + c$ su OX ašimi *turi vieną bendrą tašką*.
Tas taškas yra parabolės viršūnės taškas $(x_1; 0)$ (žr. pav. kairėje).



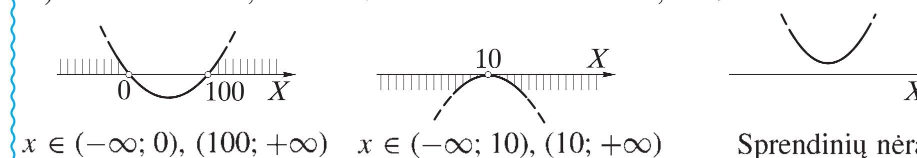
Jei lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinių neturi, tai parabolė $y = ax^2 + bx + c$ su OX ašimi *bendrų taškų neturi* (žr. pav. dešinėje).
Jei parabolė nekerta OX ašies, tai ją braižome taip:
1) Pažymime parabolės viršūnę $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.
2) Brėžiame parabolės simetrijos ašį (tiesę $x = -\frac{b}{2a}$).
3) Pažymime tašką, kuriame parabolė kerta OY ašį, t. y. tašką $(0; c)$.
4) Pažymime tašką, simetrišką taškui $(0; c)$ parabolės simetrijos ašies atžvilgiu.
5) Randame dar kelių parabolės taškų koordinates ir pažymime tuos taškus.
6) Braižome parabolę.

2) Remdamiesi grafiku, išspręskite nelygybę $y > 0$; $y < 0$; $y \geqslant 0$.

432. Nelygybę išspręskite grafiškai.
a) $x^2 - 36x + 99 < 0$; b) $x^2 - 30x + 225 > 0$; c) $-x^2 + 9x - 100 \leqslant 0$.

Sprendžiant nelygybę $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ grafiškai, pakanka nusibraižyti parabolės $y = ax^2 + bx + c$ eskizą.

a) $x^2 - 100x > 0$; b) $-x^2 + 20x - 100 < 0$; c) $x^2 + x + 100 < 0$.



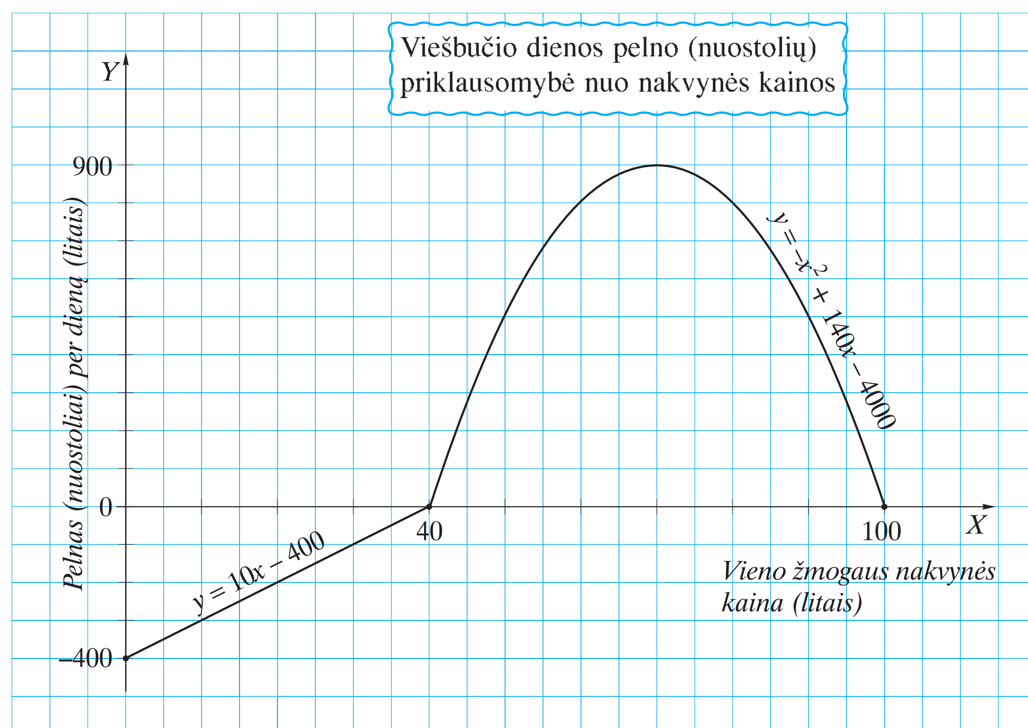
$x \in (-\infty; 0), (100; +\infty)$ $\quad$ $x \in (-\infty; 10), (10; +\infty)$ $\quad$ Sprendinių nėra

5.7. SPRENDŽIAME UŽDAVINIUS, REMDAMIESI FUNKCIJŲ GRAFIKAIS

Viešbučio savininkas nustatė, kaip viešbučio dienos pelnas (arba nuostoliai) y (litais) priklauso nuo kainos x (litais) už nakvynę vienam žmogui, kai ta kaina yra ne didesnė už 100 Lt. Šią priklausomybę galima užrašyti taip:

- kai $x < 40$, tai $y = 10x - 400$;
- kai $x \in [40; 100]$, tai $y = -x^2 + 140x - 4000$.

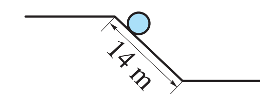
Šią priklausomybę galima pavaizduoti grafiku:



Užduotis.

1) Kokiai vieno žmogaus nakvynės kainai esant, viešbutis gauna pelną? patiria nuostolių?
2) Kokius didžiausius nuostolius per dieną gali patirti viešbutis?
3) Kokį didžiausią pelną per dieną gali gauti viešbutis?
4) Kokiai vieno žmogaus nakvynės kainai esant, viešbutis gauna didžiausią pelną? nei gauna pelno, nei patiria nuostolių?
5) Sugalvokite daugiau klausimų, susijusių su šia situacija.

433. Nuo šlaito rieda kamuolys. Šlaito ilgis lygus 14 m. Kamuolys per pirmą sekundę nurieda 0,5 m, o kiekvieną sekančią sekundę nurieda 0,5 m daugiau negu praėjusią.



1) Apskaičiuokite, kokį atstumą kamuolys nurieda per:
   a) pirmą; antrą; ...; aštuntą sekundę;
   b) vieną; dvi; ...; aštuonias sekundes.
2) Nubraižykite kamuolio nuriedėto atstumo y (metrais) priklausomybės nuo laiko x (sekundėmis) grafiką (abiejose ašyse pasirinkite vienetinės atkarpos ilgį, lygų 0,5 cm).
3) Remdamiesi grafiku, raskite:
   a) kiek laiko kamuolys riedėjo šlaitu;
   b) kokį atstumą kamuolys nuriedėjo per paskutines 5 sekundes.

434. Stačiakampę aikštelę, esančią prie sienos, reikia aptverti tvorele iš trijų pusių. Tvorelės ilgis turi būti 60 m.
a) Aikštelės kraštą, kuris yra statmenas su siena, pažymėję x m, užrašykite, kam lygūs kiti kraštai.
b) Įrodykite, kad aikštelės plotas $S(x) = -2x^2 + 60x$.
c) Nubraižykite funkcijos $S(x) = -2x^2 + 60x$ grafiką.
d) Su kuria x reikšme $S(x)$ įgyja didžiausią reikšmę?
e) Koks turėtų būti aikštelės ilgis ir plotis, kad aikštelės plotas būtų didžiausias?

435. Nuo žemės paviršiaus iš fontano trykštančio vandens srovė yra parabolės, atitinkančios funkcijos $y = -2{,}5x^2 + 5x$ grafiką, formos.
a) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką.
b) Remdamiesi grafiku, raskite srovės aukštį aukščiausiame jos taške ir didžiausią nuotolį, kurį gali pasiekti vanduo (vienetinės atkarpos ilgis atitinka 1 m).

436. Bendrovė nustatė, kad, išleidus x tūkstančių litų reklamai, parduodama y prekių. Kintamojo y priklausomybė nuo x yra tokia:
a) $y = -3x^2 + 150x + 1200$; b) $y = -8x^2 + 120x + 450$.
Nustatykite:
1) kiek litų reikia išleisti reklamai, kad būtų parduodama daugiausia prekių;
2) kiek daugiausia prekių parduodama.

437. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus, kai:
a) $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = -x^2 + 2x + 6$;
b) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = -x^2 + 2x - 4$;
c) $f(x) = -\frac{4}{x}$, $g(x) = 3$; d) $f(x) = x^2 - 2x + 4$, $g(x) = \frac{4}{x}$.
Remdamiesi brėžiniu, raskite sprendinius:
1) lygties $f(x) = g(x)$; 2) nelygybės $f(x) < g(x)$;
3) nelygybės $f(x) > g(x)$.

APIBENDRINAME

Funkcijos sąvoka

Kintamojo y priklausomybė nuo kintamojo x, kai kiekvienai galimai x reikšmei pagal kokią nors taisyklę priskiriama vienintelė y reikšmė, vadinama ***fùnkcine priklausomýbe***, arba ***fùnkcija***.

Rašoma: $y = f(x)$.

Vadinama:

x — funkcijos *nepriklausomuoju kintamuoju*;
y — funkcijos *priklausomuoju kintamuoju*;
$f(x)$ — funkcijos *reiškiniu*.

$y = f(x)$, kai $f(x) = x^2 - 1$:

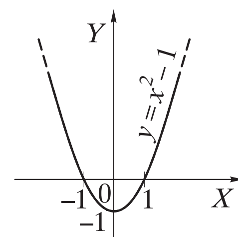
Kintamojo y priklausomybę nuo x galima:

- nusakyti žodžiais;
- pateikti x ir y reikšmių lentele;
- nurodyti reiškiniu $f(x)$;
- pavaizduoti grafiku.

$x =$	...	–3	...	0	...	3	...
$y =$	...	8	...	–1	...	8	...

$x^2 - 1$

Visuma koordinačių plokštumos OXY taškų $(x; y)$, čia $y = f(x)$, vadinama funkcijos $y = f(x)$ *grãfiku*.



Visos nepriklausomojo kintamojo x reikšmės sudaro funkcijos *apibrėžìmo srìtį*, o visos priklausomojo kintamojo y reikšmės sudaro funkcijos *reikšmių̃ srìtį*.

$x \in (-\infty; +\infty)$ — apibrėžimo sritis,
$y \in [-1; +\infty)$ — reikšmių sritis.

Funkcijos savybės

Funkcijos $y = f(x)$ reikšmės yra:

- *teigiamos* ($y > 0$) su tomis x reikšmėmis, su kuriomis $f(x) > 0$. Su tomis x reikšmėmis funkcijos grafikas yra virš OX ašies;

Kai $x \in (-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, tai $y > 0$.

- *neigiamos* ($y < 0$) su tomis x reikšmėmis, su kuriomis $f(x) < 0$. Su tomis x reikšmėmis funkcijos grafikas yra žemiau OX ašies;

Kai $x \in (-1; 1)$, tai $y < 0$.

- *lygios nuliui* ($y = 0$) su tomis x reikšmėmis, su kuriomis $f(x) = 0$. Tuose taškuose funkcijos grafikas kerta OX ašį arba ją liečia.

Kai $x = -1$ ir $x = 1$, tai $y = 0$.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama:

- *didėjančia intervale* $(a; b)$, jei tame intervale didėjant x reikšmėms atitinkamos y reikšmės didėja;
- *mažėjančia intervale* $(a; b)$, jei tame intervale didėjant x reikšmėms atitinkamos y reikšmės mažėja;
- *pastovia intervale* $(a; b)$, jei su visais x iš to intervalo y reikšmės yra vienodos.

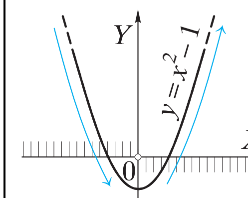
Funkcijos $y = x^2 - 1$:

- reikšmės didėja, kai $x \in (0; +\infty)$;
- reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$.

Funkcijos reikšmių:

- didėjimo intervaluose funkcijos grafikas, einant iš kairės į dešinę, kyla į viršų;
- mažėjimo intervaluose — leidžiasi žemyn;
- pastovumo intervaluose — lygiagretus OX ašiai.

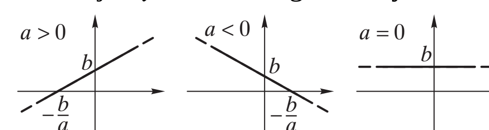
Funkcija gali turėti didžiausią reikšmę; gali turėti mažiausią reikšmę; gali tų reikšmių neturėti.

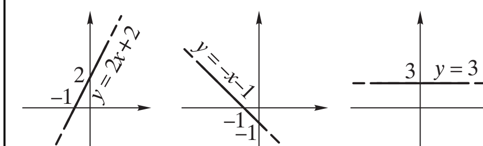


Funkcija $y = f(x) = x^2 - 1$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $x = 0$. Ta mažiausia reikšmė yra $y = -1$. Didžiausios reikšmės ši funkcija neturi.

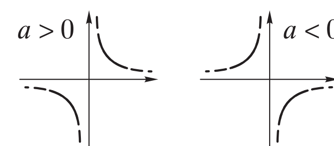
Funkcijų grafikai

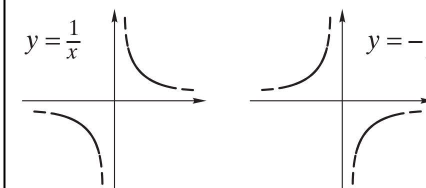
Funkcijos $y = ax + b$ grafikas yra *tiesẽ*.



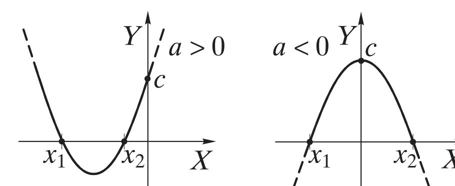


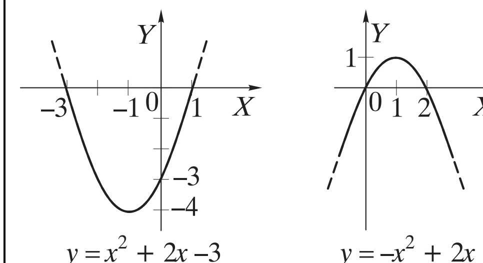
Funkcijos $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ grafikas vadinamas *hipèrbole*.





Funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ grafikas vadinamas *parãbole*.





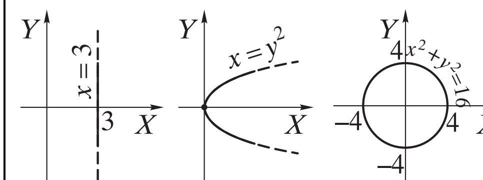
x_1 ir x_2 — lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendiniai.

Parabolės viršūnės koordinatės yra $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.

Nefunkcinės priklausomybės

Ne kiekviena kintamųjų x ir y priklausomybė yra funkcija.

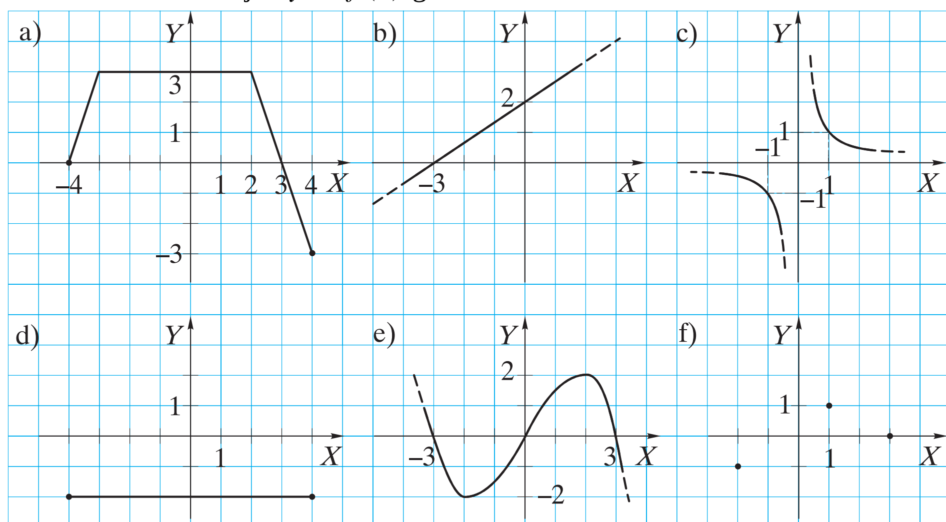
Ne kiekviena koordinačių plokštumos OXY kreivė yra kokios nors funkcijos grafikas.



SPRENDŽIAME

438. Stačiakampio ilgis lygus x cm, o plotis — y cm. Stačiakampio plotas lygus $6\,\text{cm}^2$. Užrašykite reiškinį $f(x)$, kuriuo remiantis būtų galima apskaičiuoti stačiakampio pločio y reikšmę ($y = f(x)$), kai žinoma stačiakampio ilgio x reikšmė.

439. Pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.



Remdamiesi funkcijos grafiku, užpildykite lentelę:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Apibrėžimo sritis						
Reikšmių sritis						
Didėjimo intervalai						
Mažėjimo intervalai						
Pastovumo intervalai						
x reikšmės, su kuriomis $f(x) = 0$						
x reikšmės, su kuriomis $f(x) > 0$						
x reikšmės, su kuriomis $f(x) < 0$						
Didžiausia funkcijos reikšmė						
Mažiausia funkcijos reikšmė						

440. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį.

a) $y = 3x - 2$; b) $y = 4x^2 - 2x + 7$; c) $y = \frac{x}{7}$;

d) $y = \frac{7}{x}$; e) $y = \frac{x+1}{x}$; f) $y = \frac{x}{x+1}$;

g) $y = \frac{5}{x^2-4x+3}$; h) $y = \frac{5x}{x^2+4}$; i) $y = 3\sqrt{x}$;

j) $y = \sqrt{3x+6}$; k) $y = \sqrt{7-5x}$; l) $y = \sqrt{x^2+7}$;

m) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; n) $y = \frac{2}{\sqrt{3x-6}}$; o) $y = \frac{\sqrt{3x+6}}{x}$.

441. Nubraižykite kokios nors funkcijos $y = f(x)$ grafiką, kai tos funkcijos:

a) apibrėžimo sritis yra $[-5; 4]$, o reikšmių sritis — $[-2; 3]$;

b) apibrėžimo sritis yra $[-5; 4]$, o funkcija įgyja tik teigiamas reikšmes;

c) apibrėžimo sritis yra $(-5; 4)$, reikšmių sritis — $[-3; 3]$, o $f(2) = 0$;

d) $f(x) < 0$, kai $x \in (-2; 2)$;

e) reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; -2)$; yra pastovios, kai $x \in (-2; 2)$; didėja, kai $x \in (2; +\infty)$.

442. Duota funkcija $y = f(x)$, čia $f(x) = 2 - 5x^2$. Ar teisinga lygybė:

a) $f(-2) = -18$? b) $f\left(-\frac{2}{5}\right) = 1\frac{1}{5}$? c) $f\left(\sqrt{5}\right) = 27$?

d) $f\left(\sqrt{2} - 1\right) = 10\sqrt{2} - 11$? e) $f\left(\sqrt{2}\right) - f(1) = -5$?

443. a) Nebraižydami funkcijos $y = 1{,}2x + 7$ grafiko, nustatykite, ar jis eina per tašką $A(100; 113)$; $B\left(-\frac{5}{7}; -6\frac{1}{7}\right)$; $C(-10; -5)$; $D\left(\sqrt{300}; 12\sqrt{3} + 7\right)$.

b) Kurie iš taškų $A(4{,}8; 2{,}5)$, $B\left(\frac{2}{3}; 8\right)$, $C\left(-4\frac{4}{5}; 2\frac{1}{2}\right)$, $D\left(\sqrt{40}; \frac{6}{\sqrt{10}}\right)$ priklauso funkcijos $f(x) = \frac{12}{x}$ grafikui?

444. Funkcijos $y = f(x)$ reiškinys yra $f(x) = 3x + 12$. Taškai $C(0{,}4; c)$ ir $D(d; 0)$ priklauso šios funkcijos grafikui. Apskaičiuokite c ir d reikšmes.

445. Nebraižydami funkcijos $y = f(x)$ grafiko, raskite jo ir koordinačių ašių bendrų taškų koordinates, kai:

a) $f(x) = 5x - 2$; b) $f(x) = -0{,}7x - 28$; c) $f(x) = 3x^2$;

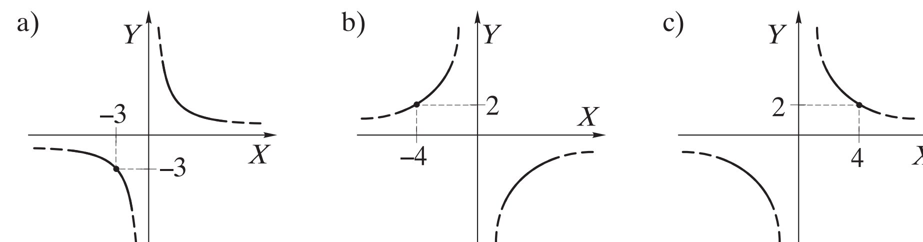
d) $f(x) = 60x - 1{,}2x^2$; e) $f(x) = -x^2 + 4$; f) $f(x) = x^2 + 3x - 130$.

446. Nebraižydami funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikų, raskite jų bendrų taškų koordinates, kai:

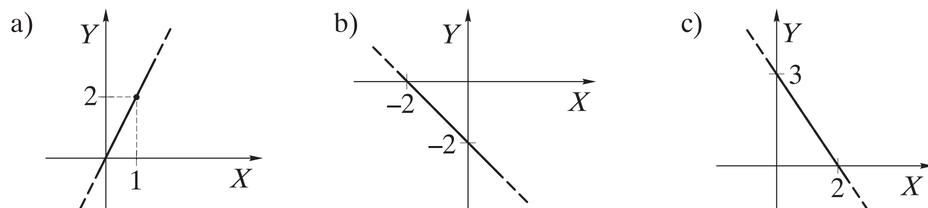
a) $f(x) = 17x + 91$, $g(x) = 83x + 9$; b) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 - 1$;

c) $f(x) = -x - 3$, $g(x) = \frac{2}{x}$; d) $f(x) = \frac{x^2}{3}$, $g(x) = -x^2 + 2$.

447. Remdamiesi hiperbolės $y = \frac{a}{x}$ grafiku, nustatykite a reikšmę.



448. Užrašykite funkciją $y = ax + b$, kurios grafikas yra nubrėžtoji tiesė.



449. Užrašykite funkciją $y = \frac{a}{x}$, kurios grafikas eina per tašką:
a) $A(12; -3)$; b) $B(-2; -8)$; c) $C\left(\frac{1}{3}; 6\right)$; d) $D\left(\frac{1}{6}; 3\right)$.

450. 1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus, kai:

a) $f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = 2$; b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = x$;

c) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = 2x + 5$; d) $f(x) = -\frac{5}{x}$, $g(x) = 6 - x$.

2) Remdamiesi grafikais, raskite x reikšmes, su kuriomis:
$f(x) = g(x)$; $f(x) > g(x)$; $f(x) \leqslant g(x)$.

451. Ar funkcija $y = f(x)$ yra kvadratinė, jei:

a) $f(x) = x^2$? b) $f(x) = (x-2)^2$? c) $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$?

d) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$? e) $f(x) = -x^2 - \sqrt{x} + 3$? f) $f(x) = x^2(x^2 - 1)$?

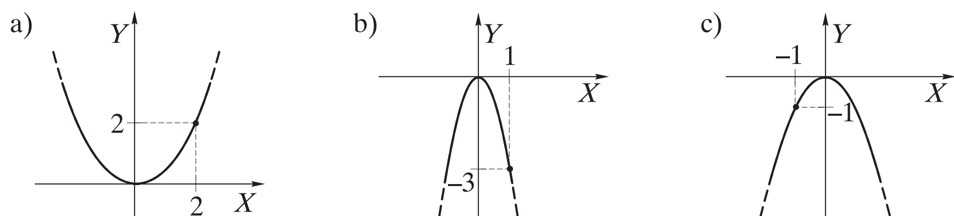
452. Į stovyklavietę iš malūnsparnio, esančio 180 m aukštyje, metamas maišas. Nustatykite, kokiame aukštyje h maišas bus įvairiais kritimo momentais, jeigu žinoma, kad $h = 180 - \frac{gt^2}{2}$; čia h yra ieškomas aukštis metrais, $g \approx 10\,\text{m/s}^2$ — laisvojo kritimo pagreitis, t — kritimo laikas sekundėmis.

a) Užpildykite lentelę ir nubraižykite h priklausomybės nuo t grafiką.

$t =$	0	1	2	3	4	5	6
$h =$							

b) Remdamiesi grafiku, nustatykite, kada maišas nukris; po kelių sekundžių maišas bus 120 m aukštyje.

453. Užrašykite kvadratinę funkciją $f(x) = ax^2$, kurios grafikas atitinka parabolę.



454. Apskaičiuokite parabolės $y = ax^2 + c$ koeficientų a ir c reikšmes, jei ta parabolė eina per taškus: a) $(0; 6)$, $(2; 0)$; b) $(-2; 0)$, $(0; 6)$; c) $\left(-2\frac{1}{3}; 0\right)$, $(0; -7)$.

455. Lygtį išspręskite grafiškai. a) $x^2 = x$; b) $2x^2 = -x + 2$; c) $-2x^2 = -\frac{4}{x}$.

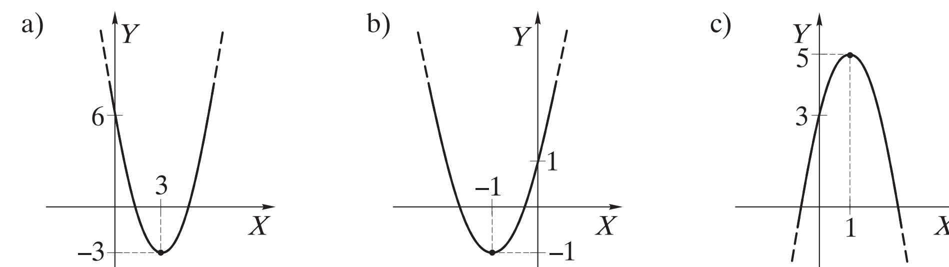
456. Grafiniu būdu išspręskite nelygybę.

a) $x^2 - 10x + 16 > 0$; b) $-x^2 - x + 6 > 0$; c) $-x^2 - 2 < 0$;

d) $x^2 + 14x + 49 > 0$; e) $x^2 - 16x + 64 \leqslant 0$; f) $-x^2 + 4x + 4 < 0$;

g) $-5x^2 \geqslant 0$; h) $x^2 + 2 < 0$; i) $-2x^2 - 1 \geqslant 0$.

457. Nurodykite kvadratinę funkciją $y = ax^2 + bx + c$, kurios grafikas yra nubraižytoji parabolė.



Nurodykime kvadratinę funkciją

$y = ax^2 + bx + c$,

kurios grafikas yra dešinėje pavaizduota parabolė.

Sprendimas.

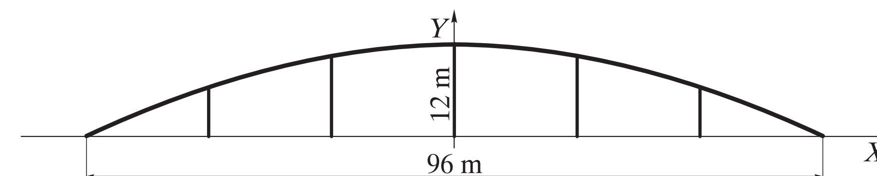
1) Parabolė OY ašį kerta taške $(0; 1)$, todėl $c = 1$.

2) Parabolės $y = ax^2 + bx + c$ viršūnės taško koordinatės yra $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.
Kadangi duotosios parabolės viršūnė yra taške $(-1; 3)$, tai teisingos yra lygybės:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1, \\ -\frac{b^2}{4a} + 1 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a, \\ -\frac{b^2}{4a} = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a, \\ -\frac{4a^2}{4a} = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a, \\ -a = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4, \\ a = -2. \end{cases}$$

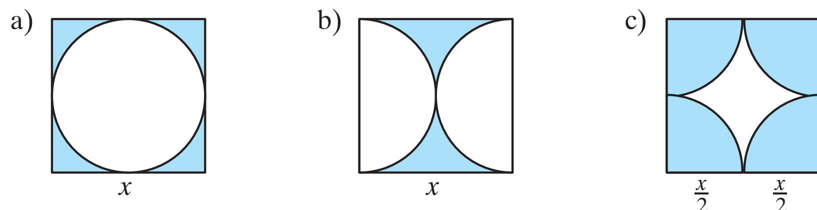
Atsakymas. $y = -2x^2 - 4x + 1$.

458. Koordinačių plokštumoje pavaizduota tilto arka, kuri yra parabolės formos. Arka turi 5 vertikalias atramas, pastatytas taškuose, kurie dalija tilto ilgį į lygias dalis. Tilto ilgis yra 96 m, o arkos aukštis — 12 m.

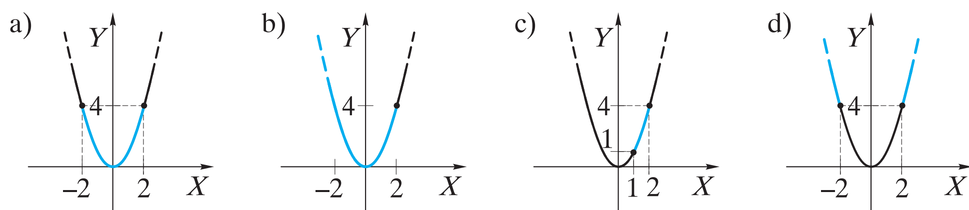


a) Sudarykite kvadratinę funkciją, kurios grafikas būtų pavaizduota parabolė.
b) Raskite atramų ilgius.

459. Užrašykite nuspalvintos kvadrato dalies ploto y priklausomybę nuo kvadrato kraštinės ilgio x. Nubraižykite tos priklausomybės $y = f(x)$ grafiką.



460. Nurodykite x reikšmių intervalus (intervalą), atitinkančius nuspalvintą funkcijos $f(x) = x^2$ grafiko dalį. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmes tame intervale.



461. Stačiakampio perimetras lygus 12 cm. Vienos stačiakampio kraštinės ilgį pažymėkite x.

1) Kam lygus kitos stačiakampio kraštinės ilgis?
2) Užrašykite, kam lygus to stačiakampio plotas y.
3) Nubraižykite stačiakampio ploto y priklausomybės nuo x grafiką.
4) Su kuria x reikšme stačiakampio plotas yra didžiausias?

462. Kamuoliukas metamas vertikaliai aukštyn 24 m/s greičiu. Atstumo nuo kamuoliuko iki žemės h (metrais) priklausomybė nuo lėkimo laiko t (sekundėmis) yra tokia: $h(t) = 24t - 5t^2$. Nubraižykite funkcijos $y = h(t)$ grafiką. Remdamiesi grafiku, atsakykite į klausimus:

a) Kiek laiko kamuoliukas kilo aukštyn ir kiek leidosi žemyn?
b) Po kiek laiko kamuoliukas nukrito ant žemės?
c) Ką rodo parabolės viršūnės taško ordinatė?

463. Mėgintuvėlyje esančių bakterijų skaičius y (tūkstančiais), bėgant laikui t (valandomis), kito pagal formulę:

a) $y = 300 + 800t - 100t^2$ $(0 \leqslant t \leqslant 9)$;
b) $y = -19t^2 + 160t + 400$ $(0 \leqslant t \leqslant 7)$.

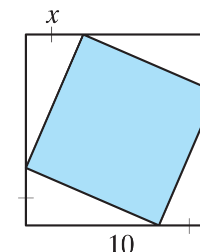
Su kuria t reikšme bakterijų skaičius mėgintuvėlyje buvo didžiausias?

464. Pasipriešinimo jėga f (niutonais), važiuojant automobiliu, priklauso nuo važiavimo greičio v (kilometrais per valandą) ir nuo kelio dangos. Kai automobilis važiuoja:

a) asfaltuotu keliu, tai $f = 24 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{30}v^2$;
b) akmeniniu grindiniu, tai $f = 29 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{15}v^2$;
c) žvyruotu keliu, tai $f = 36{,}5 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{30}v^2$.

Kuriuo keliu ir kokiu greičiu važiuojant pasipriešinimo jėga yra mažiausia?

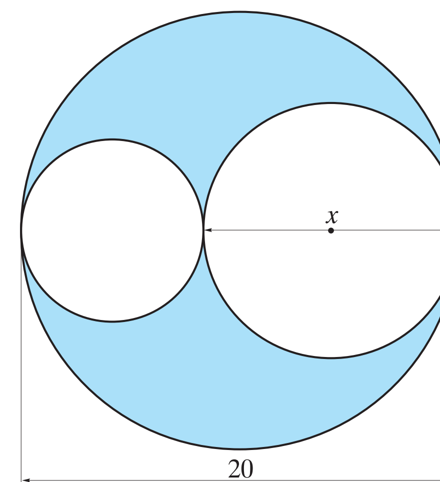
465. Didžiojo kvadrato kraštinė lygi 10.



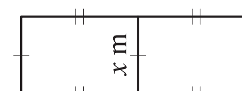
1) Įrodykite, kad nuspalvinto kvadrato plotas lygus $y = 2x^2 - 20x + 100$.
2) Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką.
3) Remdamiesi grafiku, raskite mažiausią funkcijos reikšmę.
4) Su kuria x reikšme nuspalvinto kvadrato plotas yra mažiausias?

466. Brėžinyje nuspalvintos dalies plotą pažymėkite y.

1) Įrodykite, kad nuspalvintos dalies plotas yra $y = -\frac{\pi}{2}x^2 + 10\pi x$.
2) Raskite parabolės $y = -\frac{\pi}{2}x^2 + 10\pi x$ viršūnės koordinates.
3) Su kuria x reikšme nuspalvintos dalies plotas yra didžiausias?
4) Su kuria x reikšme nenuspalvintos dalies plotas yra mažiausias?

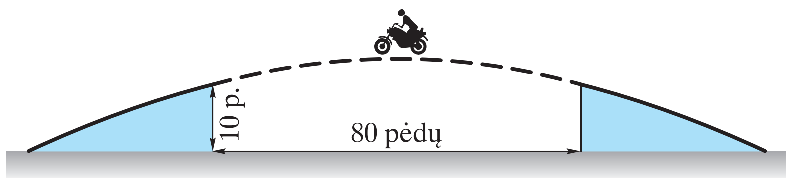


467. Ūkininkas turi 120 metrų tvoros, kurią nori panaudoti įrengdamas avims du lygius stačiakampio formos aptvarus, turinčius bendrą kraštą.



1) Abiejų aptvarų bendrą plotą $S(x)$ išreikškite x funkcija.
2) Raskite tokius aptvarų matmenis, kad plotas $S(x)$ būtų didžiausias.

468. Kaskadininkas su motociklu šoka nuo vienos platformos ant kitos, kaip parodyta paveikslėlyje. Platformų aukštis lygus 10 pėdų, atstumas tarp jų yra 80 pėdų. (Pėda — ilgio matas, lygus 30,5 cm.) Kaskadininko šuolio trajektorija atitinka funkcijos $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{320}x^2$ grafiką.



Raskite didžiausią aukštį nuo žemės, į kurį gali pakilti kaskadininkas.

469. Raskite b reikšmes, su kuriomis:

a) parabolė $y = x^2 + bx + 4$ yra virš OX ašies;

b) parabolė $y = -x^2 + bx - 9$ yra žemiau OX ašies.

> Parabolė $y = ax^2 + bx + c$ yra virš OX ašies, kai $a > 0$ ir $D < 0$.
> Parabolė $y = ax^2 + bx + c$ yra žemiau OX ašies, kai $a < 0$ ir $D < 0$.

470. Raskite m reikšmes, su kuriomis:

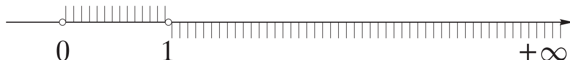
a) nelygybės $x^2 + mx + m - 3 > 0$ sprendiniai būtų visi realieji skaičiai;

b) nelygybė $-x^2 + 2mx + m - 2 > 0$ neturėtų sprendinių.

> Nelygybės $ax^2 + bx + c > 0$ sprendiniai yra visi realieji skaičiai, kai $a > 0$, $D < 0$.
> Nelygybė $ax^2 + bx + c > 0$ neturi sprendinių, kai $a < 0$, $D < 0$.



471. ***Kur skaičių yra daugiau — intervale* (0; 1) *ar intervale* (1; +∞)?**



Akivaizdu, kad intervale (1; +∞) skaičių yra be galo daug — jau vien natūraliųjų surašyti neįmanoma:

2, 3, 4, ...

Intervale (0; 1) taip pat yra begalybė skaičių — tuo galima įsitikinti, pavyzdžiui, iš tokios sekos:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...

Klausimas. Kuriame intervale — (0; 1) ar (1; +∞) — skaičių yra daugiau?
Atsakymas. Abiejuose intervaluose skaičių yra vienodai...

> Pabandykite tai įrodyti.





472. ***Projektinis darbas***

Mokyklose turėtų būti kompiuterinės mokymo priemonės (KMP):

- *Matematika 9 su Dinamine geometrija*,
- *Matematika 10 su Dinamine geometrija*.

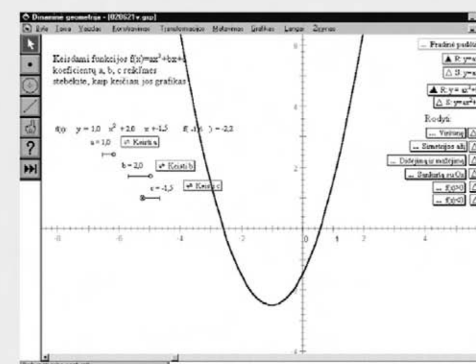
Nors šios priemonės parengtos pagal kitus vadovėlius (*Matematika 9*, I ir II dalys; *Matematika 10*, I ir II dalys), bet jomis galima naudotis ir dirbant pagal šį vadovėlį.

Pavyzdžiui, KMP *Matematika 9 su Dinamine geometrija* yra skyriai *1. Tiesinė funkcija*, *2. Kvadratinė funkcija*. Šiuose skyriuose yra dinaminiai brėžiniai, kurie skirti funkcijos sąvokai; funkcijoms $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$; lygtims $f(x) = g(x)$ (čia $f(x)$ ir $g(x)$ yra anksčiau minėtų funkcijų reiškiniai).

> Panagrinėkite šias priemones ir parenkite projektinį darbą. Projektinių darbų temų pavyzdžiai:
> 1. Lygčių grafinis sprendimas.
> 2. Funkcijos sąvoka.
> 3. Funkcijų grafikai.
> 4. Kaip keičiasi parabolė $y = ax^2 + bx + c$, keičiantis koeficientų a, b ir c reikšmėms.



2.6.4. Kaip keičiasi parabolė $y = ax^2 + bx + c$, keičiantis koeficientų a, b ir c reikšmėms



Vaizduojama:

1) Kaip keičiasi parabolė $y = ax^2 + bx + c$, keičiantis koeficientų a, b ir c reikšmėms.
2) Funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ ir jos grafiko savybės.

Titulinis Turinys Pagalba



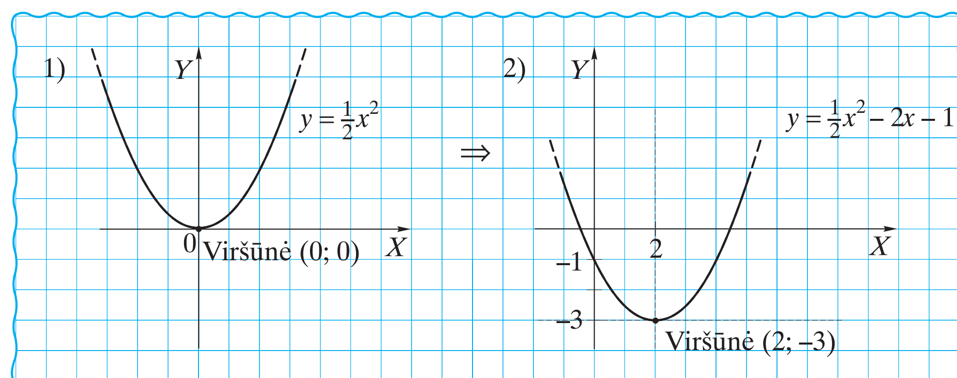
Parabolę braižome kitaip

Parabolės $y = ax^2 + bx + c$ forma priklauso tik nuo koeficiento a:
- kai $a > 0$, tai parabolės šakos nukreiptos į viršų;
- kai $a < 0$, tai parabolės šakos nukreiptos į apačią;
- kuo $|a|$ reikšmė yra didesnė, tuo parabolė yra labiau suspausta — didėjant $|a|$ reikšmėms šakos artėja prie parabolės simetrijos ašies.

Nuo koeficientų b ir c reikšmių priklauso tik parabolės padėtis koordinačių plokštumoje.

Parabolę $y = ax^2 + bx + c$ galima nubraižyti remiantis parabole $y = ax^2$.

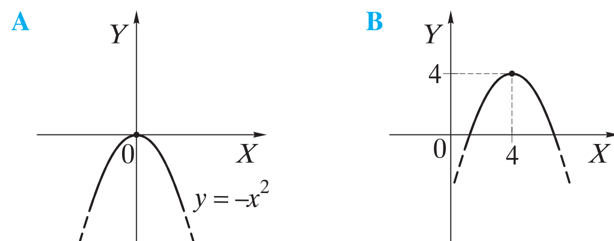
1) Braižome $y = ax^2$. Šios parabolės viršūnė yra taške $(0; 0)$.
2) Parabolę $y = ax^2$ perkeliame lygiagrečiai taip, kad jos viršūnė atsidurtų taške $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.



473. Nubraižykite parabolę $y = ax^2$. Tada apskaičiuokite parabolės $y = ax^2 + bx + c$ viršūnės koordinates. Galiausiai nubraižykite parabolę $y = ax^2 + bx + c$, kai:

a) $y = 2x^2 - x + 1$; b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$; c) $y = 3x^2 - 5x + 3$.

474. Paveikslėlyje **B** pavaizduota parabolė yra gauta lygiagrečiai koordinačių ašims pastūmus parabolę, kuri pavaizduota paveikslėlyje **A**. Užrašykite paveikslėlyje **B** pavaizduotos parabolės lygtį.

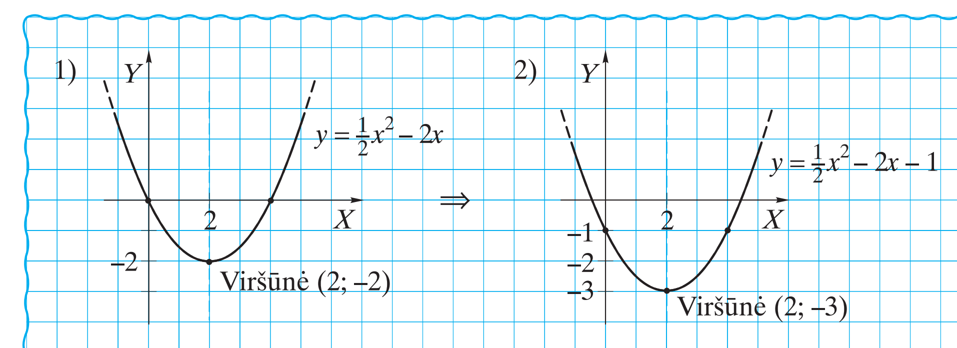


Parabolių $y_1 = ax^2 + bx$ ir $y_2 = ax^2 + bx + c$ forma yra ta pati. Parabolė y_2 yra per $|c|$ vienetų aukščiau (žemiau) už parabolę y_1.



Parabolę $y = ax^2 + bx + c$ patogu braižyti remiantis parabole $y = ax^2 + bx$.

1) Braižome $y = ax^2 + bx$. Ši parabolė OX ašį kerta taškuose $x = 0$ ir $x = -\frac{b}{a}$, o jos viršūnės koordinatės yra taške $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$ (paaiškinkite kodėl).
2) Parabolę $y = ax^2 + bx$ pastumiame per $|c|$ vienetų į viršų (kai $c > 0$) arba per $|c|$ vienetų į apačią (kai $c < 0$).



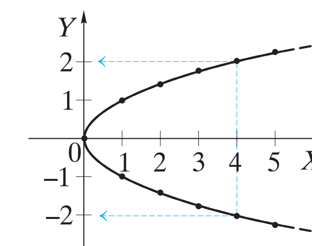
475. Nubraižykite parabolę $y = ax^2 + bx$.
Tada nubraižykite parabolę $y = ax^2 + bx + c$, kai:

a) $y = x^2 + 5x - 3$; b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$; c) $y = -x^2 + x - 3$.

Nefunkcinės dviejų dydžių priklausomybės

Lentelėje surašyti kai kurie neneigiami skaičiai x ir skaičiai y, kurių kvadratai lygūs x.

$x =$	0	1	2	3	4	5
$y =$	0	-1; 1	$-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$	-2; 2	$-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$

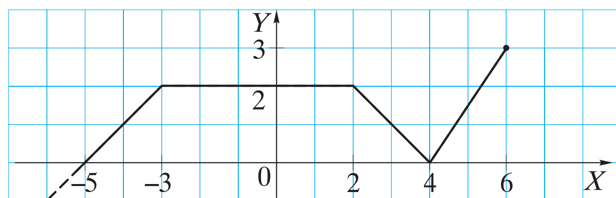


Kintamojo y priklausomybę nuo x pavaizduokime koordinačių plokštumoje (žr. pav. dešinėje).

Kaip matome, kiekvieną x reikšmę (išskyrus $x = 0$) atitinka ***ne viena*** y reikšmė (yra po dvi y reikšmes, atitinkančias $x > 0$ reikšmes).
Tokia y priklausomybė nuo x ***nėra funkcinė***.

TESTAS

476. Pavaizduotas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.



Iš grafiko matyti, kad funkcijos $y = f(x)$:

a) apibrėžimo sritis yra:
A $x \in (-\infty; 6]$ **B** $y \in (-\infty; 3)$ **C** $x \in (-6; 6]$ **D** $x \in (-\infty; +\infty)$

b) reikšmių sritis yra:
A $x \in (-\infty; 6)$ **B** $y \in (-\infty; 2]$ **C** $x \in (-5; 4)$ **D** $y \in (-\infty; 3]$

c) reikšmė, kai $x = 5$ yra:
A $y = 0$ **B** $y = 1{,}5$ **C** $y = 3$ **D** $y = 2$

d) nepriklausomojo kintamojo x reikšmės, su kuriomis $y = 0$, yra:
A $x = 2$ **B** $x = 0$ **C** $x = -5$ ir $x = 4$ **D** $x \in [-3; 2]$

e) nepriklausomojo kintamojo x visos reikšmės, su kuriomis $y = 2$, yra:
A $x \in [-3; 2]$ **B** $x = -3$, $x = 2$ **C** $x = 2$ **D** $x \in [-3; 2]$ ir $x = 5\frac{1}{3}$

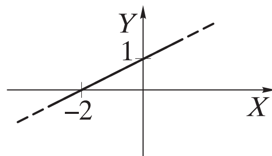
f) x reikšmių intervalai, kuriuose funkcijos reikšmės didėja, yra:
A $x \in (-\infty; 2)$ **B** $(4; 6)$ **C** $x \in (4; 3)$ **D** $x \in (-\infty; -3)$, $(4; 6)$

g) x reikšmių intervalas, kuriame funkcijos reikšmės yra pastovios, yra:
A $x \in [-5; -6]$ **B** $x \in (-3; 2)$ **C** $x \in (2; 4)$ **D** $x \in (4; 6)$

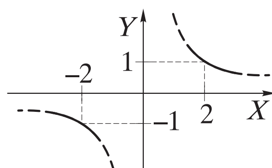
h) x reikšmės, su kuriomis funkcijos reikšmės neneigiamos, yra:
A $x \in (5; +\infty)$ **B** $x \in (-5; 4)$, $(4; 6)$ **C** $x \in [-5; 6]$ **D** $x \in [0; 3]$

477. Kurios funkcijos grafikas pavaizduotas?

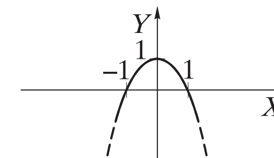
a) **A** $y = x + 1$ **B** $y = -2x + 1$ **C** $y = 2x - 1$ **D** $y = \frac{1}{2}x + 1$



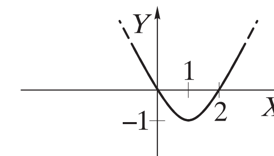
b) **A** $y = \frac{1}{x}$ **B** $y = \frac{2}{x}$ **C** $y = -\frac{1}{x}$ **D** $y = -\frac{2}{x}$



c) **A** $y = x^2 + 1$ **B** $y = x^2 - 1$ **C** $y = -x^2 + 1$ **D** $y = -x^2 - 1$



d) **A** $y = x^2 + 2$ **B** $y = x^2 + 2x$ **C** $y = x^2 - 2$ **D** $y = x^2 - 2x$



478. Funkcijos $f(x) = x^2 - 2x - 3$:

a) grafikas kerta OY ašį taške:
A $(-1; 0)$ ir $(3; 0)$ **B** $(-3; 0)$ ir $(3; 0)$ **C** $(0; -3)$ **D** Nekerta

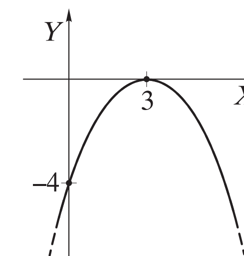
b) grafiko viršūnės koordinatės yra:
A $(-1; 0)$ **B** $(1; -4)$ **C** $(-1; -4)$ **D** $(-4; 1)$

c) reikšmių sritis yra:
A $y \in (-\infty; +\infty)$ **B** $y \in (-\infty; 4]$ **C** $y \in (-4; +\infty)$ **D** $y \in [-4; +\infty)$

d) reikšmės didėja, kai $x \in$
A $(-4; +\infty)$ **B** $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$ **C** $(1; +\infty)$ **D** $(3; +\infty)$

e) reikšmės mažėja, kai $x \in$
A $(-1; 3)$ **B** $(-\infty; 1)$ **C** $(-\infty; -4)$ **D** $(1; +\infty)$

479. Pavaizduotas funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafikas.



a) Kurios funkcijos grafikas pavaizduotas?
A $y = -x^2 - 4x + 3$ **B** $y = \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 4$
C $y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 4$ **D** $y = x^2 - 3x - 4$

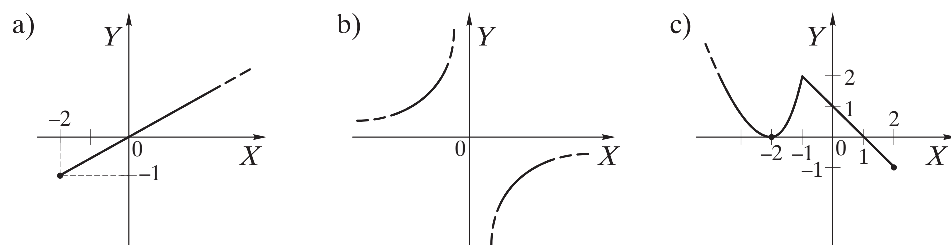
b) Kurios nelygybės sprendiniai yra $x \in (-\infty; +\infty)$?
A $f(x) > 0$ **B** $f(x) < 0$ **C** $f(x) \geqslant 0$ **D** $f(x) \leqslant 0$

c) Lygties $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminantas yra:
A $D > 0$ **B** $D < 0$ **C** $D = 0$ **D** Nustatyti neįmanoma

PASITIKRINAME

480. Nustatykite funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį, kai:
a) $f(x) = x^2 + 2x$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$; c) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$; d) $f(x) = \sqrt{2x} - 2$.

481. Naudodamiesi funkcijos $y = f(x)$ grafiku, užrašykite:
1) funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis;
2) x reikšmių intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės yra teigiamos; yra neigiamos;
3) x reikšmių intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės didėja; mažėja;
4) didžiausią arba mažiausią funkcijos reikšmę (jei tokia reikšmė yra).

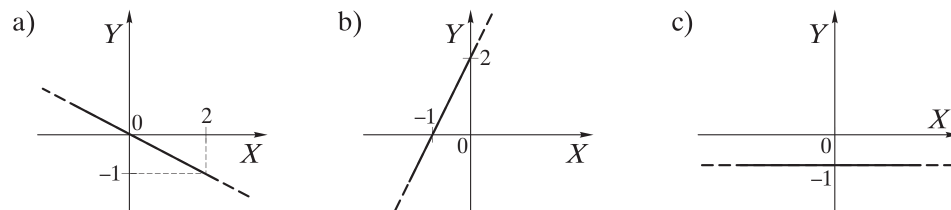


482. Nubrėžkite tiesę $y = ax + b$, kai:
a) $a = 1$, $b = 0$; b) $a = 1$, $b = 1$; c) $a = 0$, $b = 1$.

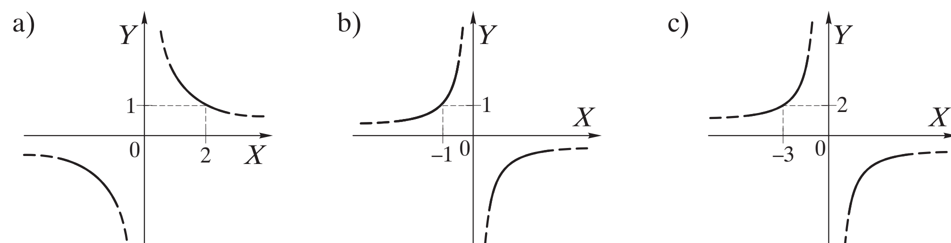
483. Nubraižykite hiperbolę $y = \frac{a}{x}$, kai:
a) $a = 2$; b) $a = -2$.

484. Nubraižykite parabolę $y = ax^2 + bx + c$, kai:
a) $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$; b) $a = -1$, $b = -1$, $c = 0$;
c) $a = 2$, $b = 0$, $c = -2$; d) $a = 1$, $b = 2$, $c = -8$.

485. Pavaizduota tiesė $y = ax + b$. Nustatykite a ir b reikšmes.

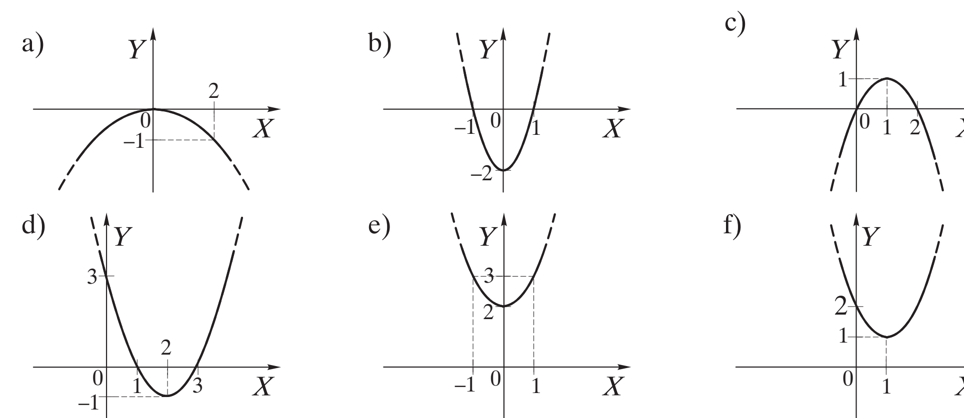


486. Pavaizduota hiperbolė $y = \frac{a}{x}$. Nustatykite a reikšmę.



487. 1) Nubraižykite parabolę.
a) $y = x^2 + 2x + 3$; b) $y = -x^2 + 5x$; c) $y = x^2 - 4x + 4$.
2) Remdamiesi parabole, nustatykite x reikšmes, su kuriomis parabolės taškų y reikšmės lygios 0; yra mažesnės už 0; yra didesnės už 0.

488. Pavaizduota parabolė $y = ax^2 + bx + c$.



1) Nustatykite a, b ir c reikšmes. 2) Apibūdinkite parabolę atitinkančią funkciją.

489. Iš 5 m aukščio vertikaliai aukštyn paleista strėlė, kurios pradinis greitis yra 50 m/s. Strėlės aukštis nuo žemės h (m), kintant laikui t (s), apskaičiuojamas taip: $h = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$; čia $g \approx 10\,\text{m/s}^2$ — laisvai krintančio kūno pagreitis.
a) Įsitikinkite, kad strėlės aukščio priklausomybę nuo jos lėkimo greičio galima užrašyti taip: $h = -5(t-5)^2 + 130$.
b) Nubraižykite grafiką, vaizduojantį strėlės aukščio h kitimą, bėgant laikui t.
c) Per kiek sekundžių nuo paleidimo strėlė pasiekia aukščiausią tašką?
d) Kiek metrų nuo žemės bus strėlė, būdama aukščiausiame taške?

490. Laisvai krintantis akmuo per t sekundžių apytiksliai nukrenta atstumą $h = 5t^2$ (metrais). Šachtos gylis yra 120 m. Ar nuo žemės paviršiaus paleistas akmuo pasieks šachtos dugną per 4 s? per 5 s?

491. 1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite:
a) parabolę $y = 2x^2$ ir tiesę $y = 5x - 2$;
b) parabolę $y = x^2 - 8$ ir tiesę $y = 4 - x$.
2) Remdamiesi grafiku, nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis:
a) $2x^2 = 5x - 2$; b) $x^2 - 8 = 4 - x$.
3) Remdamiesi grafiku, nustatykite apytikslius tų lygčių sprendinius.
4) Algebriškai išspręskite tas lygtis.

492. Nelygybę išspręskite grafiškai.
a) $-x^2 + 6x - 5 > 0$; b) $x^2 - 9 \geqslant 0$; c) $-2x^2 + 2 < 0$;
d) $x^2 + 7 > 0$; e) $-x^2 - 3 > 0$; f) $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$.

01–05

493. Duoti du skaičiai A ir B: a) $A = 10$, $B = 13$; b) $A = 15$, $B = 25$.
1) Kiek procentų skaičius B yra didesnis už A?
2) Kiek procentų skaičius A yra mažesnis už B?
3) Iš kokio skaičiaus padauginę A, gauname B?
4) Iš kokio skaičiaus padauginę B, gauname A?

494. Prekė iš pradžių kainavo: a) 120 Lt; b) 160 Lt. Jos kaina keitėsi taip:
- iš pradžių padidėjo 20 %,
- tada sumažėjo 10 %,
- galiausiai sumažėjo dar 10 %.

1) Kokia yra galutinė prekės kaina?
2) Kiek procentų pasikeitė galutinė prekės kaina, palyginti su pradine?

495. Atlikite veiksmus.

a) $\frac{1}{3x} + \frac{1}{6x}$; b) $\frac{2}{3x} - \frac{1}{6x}$; c) $\frac{7x^2}{8} \cdot \frac{2}{x^6}$;

d) $\frac{x^8}{4} : \frac{8x^2}{3}$; e) $\frac{3x}{2x-1} + \frac{7x}{1-2x}$; f) $\frac{2x}{3x-10} + \frac{5x}{10-3x}$;

g) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1}$; h) $\frac{x-2}{x+1} - \frac{x-1}{x+2}$; i) $\frac{(2-x)^2}{x^2-5x} \cdot \frac{x-5}{x-2}$;

j) $\frac{x-1}{x-4} \cdot \frac{x^2-4x}{(1-x)^2}$; k) $\frac{x-3}{4x^2} : \frac{4x-12}{x^3}$; l) $\frac{5x-1}{8x^2} : \frac{5x^2-x}{2}$.

496. Kvadratinį trinarį išskaidykite dauginamaisiais (jei įmanoma).

a) $x^2 - 5x + 6$; b) $-2x^2 + 10x - 12$; c) $x^2 - 10x + 25$;

d) $-x^2 - x + 2$; e) $x^2 + x + 1$; f) $-3x^2 - 4x - 2$.

497. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{3}{x} - 3 = 0$; b) $\frac{3x-3x^2}{x} = 0$; c) $\frac{x}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$.

498. a) Valtis nuplaukė 24 km pasroviui ir apsisukusi grįžo atgal. Kelionėje ji iš viso užtruko 5 valandas. Koks buvo valties savasis greitis, jei srovės greitis lygus 2 km/h?

b) Valtis nuplaukė upe 4 km prieš srovę ir 15 km pasroviui. Iš viso ji sugaišo 3 valandas. Koks yra valties greitis stovinčiame vandenyje, jei upės tėkmės greitis lygus 3 km/h?

499. a) Du tekintojai užduotį atliko per 3 dienas. Per kiek dienų tą užduotį atliktų antrasis tekintojas, jei jam reikėtų 8 dienų daugiau negu pirmajam darbininkui tą darbą atlikti vienam?

b) Dvi brigados, dirbdamos kartu, gali apsodinti aikštę gėlėmis per 6 valandas. Per kiek valandų gali atlikti šią užduotį pirmoji brigada, dirbdama atskirai, jei ji gali atlikti darbą 5 valandomis greičiau negu antroji?

500. Išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} x - y = 10, \\ xy = -9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y = 4, \\ x^2 - y = 22. \end{cases}$

501. Išspręskite nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} 2x + 4 > 0, \\ -3x - 1 > -100; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 - 5x > x + 4, \\ 2x + 1 < x - 2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 5 < 0, \\ 2x - 3 \geqslant 10. \end{cases}$

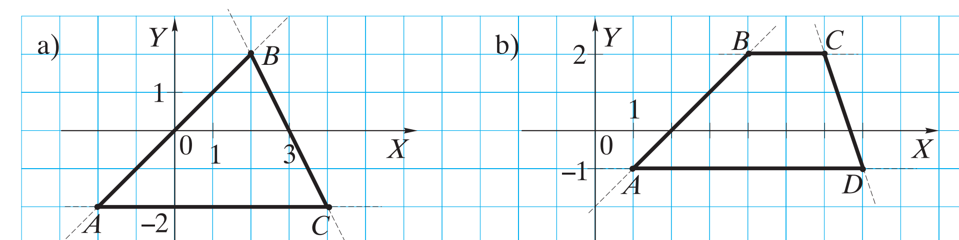
502. Išspręskite dvigubąją nelygybę: a) $4 < 5x \leqslant 10$; b) $-2 < -3x + 1 \leqslant 7$.

503. Išspręskite kvadratinę nelygybę.

a) $x^2 - 9 \geqslant 0$; b) $x^2 - 3x < 0$; c) $x^2 + 9 > 0$;

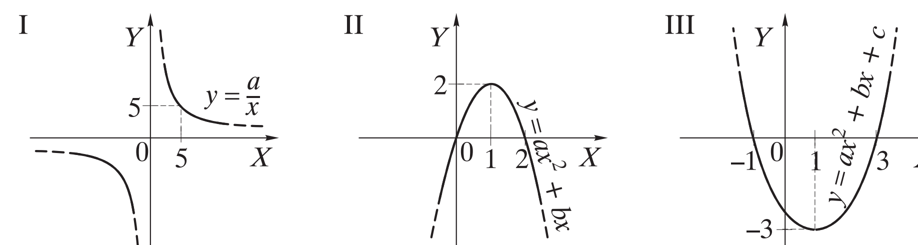
d) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$; e) $x^2 - 5x + 6 > 0$; f) $x^2 + x + 1 \leqslant 0$.

504. Koordinačių plokštumoje pavaizduota figūra, susidariusi susikirtus tiesėms.



1) Užrašykite tų tiesių lygtis. 2) Apskaičiuokite figūros perimetrą.
3) Apskaičiuokite figūros plotą.

505. 1) Užrašykite pavaizduotos kreivės lygtį.



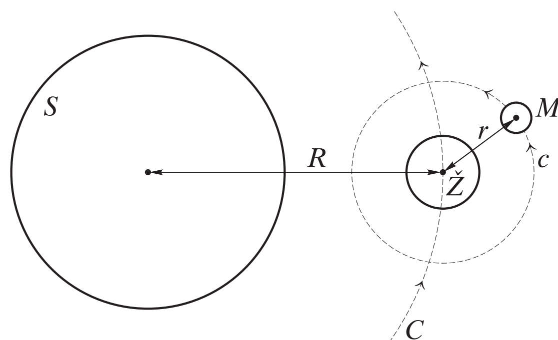
2) Naudodamiesi brėžiniu, nustatykite:
a) grafiką atitinkančios funkcijos apibrėžimo sritį; reikšmių sritį;
b) x reikšmes, su kuriomis y reikšmės yra teigiamos; neigiamos;
c) x reikšmių intervalą (intervalus), kuriame (kuriuose) y reikšmės didėja; mažėja;
d) ar funkcija turi didžiausią reikšmę; mažiausią reikšmę. Jei turi, tai nustatykite tą reikšmę ir ją atitinkančią x reikšmę.

506. 1) Nubraižykite funkcijų $y = f(x)$, $y = g(x)$ ir $y = h(x)$ grafikus vienoje koordinačių plokštumoje, kai: $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $g(x) = x$, $h(x) = -\frac{4}{x}$.

2) Remdamiesi brėžiniu išspręskite:
a) lygtį $\frac{x^2}{4} = x$; $\frac{x^2}{4} = -\frac{4}{x}$; $x = -\frac{4}{x}$;
b) nelygybę $x < -\frac{4}{x}$; $\frac{x^2}{4} \leqslant x$; $\frac{x^2}{4} > -\frac{4}{x}$.

Labai dideli...

Mėnulis skrieja aplink Žemę, Žemė skrieja aplink Saulę, o Saulė skrieja aplink Galãktikos centrą. Sakykime, kad Mėnulio, Žemės ir Saulės skriejimo trajektorijos yra apskritimai (iš tikrųjų tos trajektorijos panašesnės į èlipses — suplotus apskritimus).



S — Sáulė
$Ž$ — Žẽmė
M — Mė̃nulis

R — atstumas nuo $Ž$ iki S centrų
r — atstumas nuo $Ž$ iki M centrų

C — Žemės trajektorija
c — Mėnulio trajektorija

Lentelėje surašyti kai kurie apytiksliai Saulės, Žemės ir Mėnulio duomenys.

	Spindulys	Greitis	Apskrieja aplink
Mėnulis	≈ 1700 km	≈ 1 km/s	Žemę per ≈ 27 paras
Žemė	≈ 6400 km	≈ 30 km/s	Saulę per ≈ 365 paras
Saulė	≈ 700 000 km	≈ 220 km/s	Galaktikos centrą per ≈ 230 000 000 metų

507. Naudodamiesi lentelės duomenimis, apskaičiuokite:

1) Saulės greitį ir Žemės greitį kilomètrais per valandą (km/h);

Mėnulio greitis: $\approx 1\,\frac{\text{km}}{\text{s}} = 1\cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 1\cdot 60\cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 3600\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2) atstumą, kurį Žemė nuskrieja per metus, t. y. Žemės skriejimo trajektorijos (apskritimo) ilgį C;

Mėnulis apie Žemę apskrieja per ≈ 27 paras = 27 · 24 h = 648 h.
Per 648 h Mėnulis nuskrieja atstumą $c \approx 3600\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 648\,\text{h} = 2\,332\,800\,\text{km}$.

3) atstumą R tarp Žemės ir Saulės centrų. (Vietoj π imkite 3.)

Atstumą r tarp Mėnulio ir Žemės centrų galima apskaičiuoti naudojantis formule $2\pi r = c$:

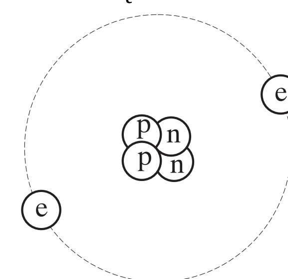
$$r = \frac{c}{2\pi} \approx \frac{2\,332\,800\,\text{km}}{2\cdot 3} = 388\,800\,\text{km}.$$

Labai maži...

Beveik visa, kas mus supa, sudaryta iš ***molèkulių***.

Norėdami užpildyti 1 milimètro ilgio atkarpėlę, vieną šalia kitos turėtume sudėti apie 1 000 000 vidutinio dydžio molekulių.

Molekulės yra sudarytos iš ***atòmų***. Atomai taip pat nėra nedalomi — jie sudaryti iš ***protònų*** (p), ***neutrònų*** (n) ir ***elektrònų*** (e).
Didžiąją atomo masės dalį (per 99,9%) sudaro protonai ir neutronai — jie susitelkę atomo centre, kuris yra vadinamas *atòmo bránduoliu*. Elektronai skrieja aplink atomo branduolį.



Atomo modelis primena Saulės sistemos modelį:
— apie Saulę skrieja planetos;
— apie atomo branduolį skrieja elektronai.

Lentelėje surašyti vidutiniai molekulių, atomų ir atomų branduolių spindulių ilgiai.

	Molekulė	Atomas	Atomo branduolys
Spindulys	≈ 0,0000005 mm	≈ 0,000000005 mm	≈ 0,000000000005 mm

508. 1) Mėnulio, Žemės, Saulės, molekulės, atomo ir atomo branduolio spindulių ilgius užrašykite metrais, o tada tuos skaičius užrašykite standartine išraiška.

Labai dideli ir labai maži teigiami skaičiai A dažnai rašomi *standártine ìšraiška*:

$$A = a\cdot 10^n;\quad \text{čia}\quad 1 \leqslant a < 10,\quad n \in \mathbf{Z}.$$

Sveikasis skaičius n vadinamas skaičiaus A eile.

$$25\,000\,000 = 2{,}5\cdot 10^7;\quad 0{,}00000025 = 2{,}5\cdot 10^{-7}.$$

2) Kiek kartų:
a) atomo branduolio spindulys yra mažesnis už atomo spindulį?
b) molekulės spindulys yra didesnis už atomo spindulį?
c) Saulės spindulys yra didesnis už atomo branduolio spindulį?

Gal jums būtų įdomu parengti kokį nors projektinį darbelį apie Saulės sistemą, mūsų Galaktikos centrą ar mikrodalelès?

1. Procentai

85. 1) 320 Lt; 2) 20 %; 3) 25 %. **86.** 1) 25 %; 2) 20 %.

87. 1) 768 Lt; 2) 288 Lt; 3) 50 %; 4) 0,5. **88.** 1) 56 %; 2) ≈ 36 %.

89. a) Sumažėjo 1 %; b) sumažėjo 4 %.

90. a) 3 kartus, 200 %; b) 4 kartus, 300 %; c) 120 kartų, 11 900 %.

91. a) 102 Lt; b) 384 Lt. **92.** a) 11 340 Lt; b) 11182,5 Lt; c) 11261,25 Lt.

93. a) 6 %; b) 6,5 %. **94.** a) 6000 Lt; b) 3950 Lt; c) 3805 Lt.

95. a) 11 500 Lt; b) 11576,25 Lt. **96.** 1) 1080 Lt; 2) 20 %; 3) 1,2 karto.

97. a) 300 Lt; b) 100 Lt; c) 50 Lt. **98.** 180 Lt.

2. Trupmeniniai raidiniai reiškiniai

184. a) $\frac{5}{9}$; 0; $\frac{1}{5}$; b) -6; $-\frac{1}{6}$; 2; c) $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; 0; d) 0; 0; $\frac{1}{2}$.

185. a) 0; b) 2; c) -6; d) 0 ir -1. **186.** a) -7; b) 0; c) -15; d) 0 ir 9.

187. a) $3x^2$; b) $\frac{1}{3x}$; c) $\frac{1}{2y}$; d) $3y$; e) $x+1$; f) 4; g) $x-10$; h) $\frac{x}{x-2}$; i) $\frac{1}{x+9}$; j) $\sqrt{x}-3$; k) -1; l) -1.

188. a) $\frac{13}{m}$; b) $\frac{19}{y}$; c) $\frac{x+2}{x-5}$; d) $\frac{a-3}{2a+2}$; e) $\frac{5x+3}{x^2}$; f) $\frac{9-4y}{y^2}$; g) $\frac{5a^2+3a-3}{(a-1)a}$; h) $\frac{5y^2-17y-14}{(y+2)(y-2)}$; i) $\frac{8a+1}{a}$; j) $\frac{m^2-2}{m}$; k) $\frac{6-3y^2}{y}$; l) $\frac{2-12x^2}{3x}$.

189. a) $\frac{30}{x^3}$; b) $\frac{8y^2}{15}$; c) $\frac{(m+2)(m-2)}{12m^2}$; d) $\frac{a^3}{(a-5)(a+5)}$; e) $\frac{4a}{7(a+2)}$; f) $\frac{3(y-1)}{5(y+1)}$; g) $\frac{6}{m^2+1}$; h) $\frac{14(x^2+1)}{x^3}$; i) $\frac{1}{2}$; j) x; k) $\frac{(y-2)y}{3}$; l) $\frac{2(m+3)}{m}$; m) $\frac{m}{2}$; n) $2a^2$; o) $\frac{7x}{x-7}$; p) $\frac{4y^2}{y+4}$; r) $a-1$; s) $4x$; t) $\frac{4m}{9}$; u) $6x^2-12x$; v) $-\frac{7m}{m+5}$; z) $\frac{a+1}{a}$; g) $2x^2$; w) $\frac{2x+3}{3x}$.

190. 1) a) 0; -7; -12; 0; b) 0; -4; -6; 0; 2) a) -5; 3; b) -1; 4.

191. a) **A** šaknų neturi, **B** turi vieną šaknį, **C** turi dvi šaknis;
b) **A** turi dvi šaknis, **B** šaknų neturi, **C** turi vieną šaknį.

192. a), d), e) — taip; b), c), f) — ne.

193. a) $(x-2)(x+4)$; b) $(x-7)(x+1)$; c) $(x-3)(x+6)$; d) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$; e) $(x-0,3)(x+0,7)$; f) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)$.

194. a) $x=13$; $(x-13)^2$; b) $x=-2,5$; $(x+2,5)^2$; c) $x=1,5$; $(x-1,5)^2$; d) $x=-\frac{1}{5}$; $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2$; e) $x=\frac{5}{2}$; $4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$; f) $x=-\frac{2}{3}$; $9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$.

195. a) $\frac{x+9}{x+10}$; b) $\frac{x-9}{x-7}$; c) $\frac{x-4}{x+4}$; d) $\frac{y+1}{y-1}$; e) $\frac{1}{y+1}$; f) $\frac{2y}{3+2y}$.

197. Teisingas visiems skaičiams, kurie nelygūs 2.

3. Trupmeninės lygtys

267. a) 7; b) 0; c) -6; 6; d) 6; 2.

268. a) 0; b) 15; c) 9; d) 5.

269. a) -3; b) 6; c) 6; d) 3.

271. a) 0; b) 10; c) 12; d) -2; e) -1; f) 6; g) -2; h) 7; i) -1; 1; j) -2; 2; k) 0; 2; l) 0; $1\frac{1}{8}$.

272. a) -5; b) 13; c) -6; d) $-\frac{8}{19}$.

273. 12 km/h. **274.** 40 km/h.

275. 9 km/h. **276.** 25 km/h.

277. 4 km/h. **278.** $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$; 1.

279. 4 dienas; 12 dienų.

280. Senelis — per 5 dienas, anūkas — per 20 dienų.

281. $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$; 1.

282. $3\frac{3}{4}$ h (= 3 h 45 min).

283. 12 h; 18 h.

284. a) 1 ir 4; b) 3 ir 2; -2 ir -3; c) -2 ir 3; d) 4 ir -3; 3 ir -4.

285. a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm; b) $a = 8$ m, $b = 15$ m.

286. a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm; b) $a = 8$ mm, $b = 15$ mm.

287. a) $(-7; 10)$, $(6; -3)$; b) $(-3; 1)$, $(2; 6)$; c) $(5; -1)$, $(-1; 5)$; d) $(2; -1)$, $(1; -2)$; e) $(3; 6)$; f) $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

4. Nelygybių sistemos, kvadratinės nelygybės

391. a) $(-3; +\infty)$; b) $(-\infty; 0,6]$; c) $[2; +\infty)$; d) $(-\infty; 13]$; e) $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right)$; f) $[-4,5; +\infty)$.

392. a) -7; 0; b) -7; 0; 3; e) 3.

393. a) $(-1; 3]$; b) $[0; 7)$; c) $(2; +\infty)$; d) $(-\infty; -2)$.

394. a) $\left(-2; 1\frac{2}{3}\right)$; b) $\left(-9; \frac{2}{7}\right]$; c) $\left(-\infty; 5\frac{1}{3}\right)$; d) $(-\infty; 4]$; e) $(4; +\infty)$; f) $\left(-3; \frac{1}{3}\right]$; g) $(10; +\infty)$; h) $(-3,5; 9]$.

395. a) $x \in (-4; 2]$; b) $x \in (-2; 1,5]$; c) $x \in (-1; 8)$; d) $x \in (0; 1,5]$; e) $x \in \left[-0,5; 2\frac{2}{3}\right]$; f) $x \in \left[-0,7; \frac{8}{15}\right)$.

396. a) $a \in (-5,5; -3]$; b) $a \in \left(1\frac{2}{3}; 4\right]$; c) $b \in [-5,5; 0,5]$; d) $b \in \left(1; 6\frac{1}{3}\right)$.

397. a) 6; 7; 8; b) 31; 32; 33; 34.

398. 1) a) $x \in (-\infty; -7)$, $(0; +\infty)$; b) $x \in (0; 4{,}5)$; c) $x \in (-\infty; -11)$, $(2; +\infty)$;
d) $x \in (0; 3)$; e) $x \in (-\infty; 0)$, $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; f) $x \in (-2{,}5; 3)$.
2) a) $x \in (-5; 0)$; b) $x \in (-\infty; 0)$, $(3{,}5; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; -1)$, $(4; +\infty)$;
d) $x \in (0; 7)$; e) $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$; f) $x \in (-6; 5{,}7)$.

399. a) $x \in (-\infty; 0)$, $(8; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 0]$, $[4; +\infty)$;
c) $x \in (-\infty; 0)$, $\left(3\frac{1}{3}; +\infty\right)$; d) $x \in (-1; 1)$; e) $[-4; 4]$; f) $x \in \left[-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right]$;
g) $(-\infty; -4]$, $[-3; +\infty)$; h) $x \in (-5; 7)$; i) $x \in (-\infty; 1)$, $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

400. a) 1; b) 3; c) 9; d) 5; e) 2; f) 4; g) 5; h) 3; i) 2.

401. Ne didesnis už 7 cm. **402.** $60\,\text{km/h} < v < 75\,\text{km/h}$. **403.** a) 1; 2; b) 6.

5. Funkcijos

480. a) $x \in (-\infty; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$;
c) $x \in (-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; +\infty)$; d) $x \in [0; +\infty)$.

481. a) 1) $x \in [-2; +\infty)$, $y \in [-1; +\infty)$;
2) $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in [-2; 0)$;
3) funkcija yra didėjanti, t. y. su visais $x \in (-2; +\infty)$ funkcijos reikšmės didėja;
4) didžiausios reikšmės funkcija neturi, mažiausia funkcijos reikšmė lygi -1.
b) 1) $x \in (-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$;
2) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$; $y < 0$, kai $x \in (0; +\infty)$;
3) funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir $x \in (0; +\infty)$; nėra intervalų, kuriuose funkcijos reikšmės mažėja;
4) didžiausios ir mažiausios reikšmių funkcija neturi.
c) 1) $x \in (-\infty; 2]$, $y \in [-1; +\infty)$;
2) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; -2)$, $(-2; 1)$; $y < 0$, kai $x \in (1; 2]$;
3) didėja, kai $x \in (-2; -1)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; -2)$ ir $x \in (-1; 2)$;
4) mažiausia funkcijos reikšmė lygi -1.

482. Tiesė eina per:
a) koordinačių plokštumos tašką $(0; 0)$ ir yra I ir III ketvirčių pusiaukampinė;
b) taškus $(0; 1)$, $(-1; 0)$;
c) per tašką $(0; 1)$ ir yra lygiagreti su OX ašimi.

483. Hiperbolės šakos yra: a) I ir III ketvirčiuose; b) II ir IV ketvirčiuose.

484. a) Parabolės $y = x^2$ šakos nukreiptos į viršų; viršūnė yra taške $(0; 0)$.
b) Parabolės $y = -x^2 - x$ šakos nukreiptos į apačią; OX ašį kerta taškuose $(0; 0)$ ir $(-1; 0)$; viršūnė yra taške $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.
c) Parabolės $y = 2x^2 - 2$ šakos nukreiptos į viršų; OX ašį kerta taškuose $(-1; 0)$ ir $(1; 0)$; viršūnė yra taške $(0; -2)$.
d) Parabolės $y = x^2 + 2x - 8$ šakos nukreiptos į viršų; OX ašį kerta taškuose $(-4; 0)$ ir $(2; 0)$, OY ašį kerta taške $(0; -8)$; viršūnė yra taške $(-1; -9)$.

485. a) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$; b) $a = 2$, $b = 2$; c) $a = 0$, $b = -1$.

486. a) $a = 2$; b) $a = -1$; c) $a = -6$.

487. 2) a) nėra x reikšmių, su kuriomis $y = 0$ arba $y < 0$;
$y > 0$, kai $x \in (-\infty; +\infty)$.
b) $y = 0$, kai $x = 0$, $x = 5$; $y > 0$, kai $x \in (0; 5)$;
$y < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$, $(5; +\infty)$.
c) $y = 0$, kai $x = 2$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$;
nėra x reikšmių, su kuriomis $y < 0$.

488. 1) a) $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = 0$; b) $a = 2$, $b = 0$, $c = -2$;
c) $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$; d) $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$;
e) $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$; f) $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.
2) a) $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0]$; $y < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$; funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; 0)$; mažėja, kai $x \in (0; +\infty)$; didžiausia funkcijos reikšmė lygi 0, mažiausios reikšmės funkcija neturi.
b) $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in [-2; +\infty)$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (-1; 1)$; funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (0; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$; didžiausios reikšmės funkcija neturi, mažiausia funkcijos reikšmė lygi -2.
c) $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in (-\infty; 1]$; $y > 0$, kai $x \in (0; 2)$; $y < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$; funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; 1)$; mažėja, kai $x \in (1; +\infty)$; didžiausia funkcijos reikšmė lygi 1, mažiausios reikšmės funkcija neturi.
d) $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in [-1; +\infty)$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$; $y < 0$, kai $x \in (1; 3)$; funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (2; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 2)$; didžiausios reikšmės funkcija neturi, mažiausia funkcijos reikšmė lygi -1.
e) $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in [2; +\infty)$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; +\infty)$; funkcijos reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$; didėja, kai $x \in (0; +\infty)$; mažiausia funkcijos reikšmė $y = 2$, kai $x = 0$.
f) $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in [1; +\infty)$; $y > 0$, kai $x \in (-\infty; +\infty)$; funkcijos reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; 1)$; didėja, kai $x \in (1; +\infty)$; mažiausia funkcijos reikšmė $y = 1$, kai $x = 1$.

489. b) Grafikas yra parabolės $y = -5x^2 + 50x + 5$ dalis, esanti I ketvirtyje.
c) per 5 s; d) 130 m.

490. Per 4 s nepasieks; per 5 s pasieks.

491. 2), 3) lygtis $2x^2 = 5x - 2$ turi 2 sprendinius: $x_1 \approx 0{,}5$, $x_2 \approx 2$;
lygtis $x^2 - 8 = 4 - x$ turi 2 sprendinius: $x_1 \approx -4$, $x_2 \approx 3$.
4) $2x^2 = 5x - 2$, kai $x = 0{,}5$ ir $x = 2$; $x^2 - 8 = 4 - x$, kai $x = -4$ ir $x = 3$.

492. a) $x \in (1; 5)$; b) $x \in (-\infty; -3]$, $[3; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$;
d) $x \in (-\infty; +\infty)$; e) sprendinių nėra; f) $x = 1$.

Matematika tau+

10 klasė

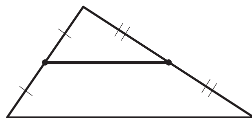
2 dalis

TEV

Pagrindiniai skyreliai

Trikampio vidurio linija

Prisiminkime, ką sutarta yra vadinti trikampio vidurio linija.



APIBRĖŽIMAS.
Atkarpà, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus, vadinama ***trìkampio vìdurio lìnija***.

Apibrėžiant trikampio vidurio liniją, vartojama sąvoka *atkarpà*. Ją taip pat reikia apibrėžti.

Ãtkarpa vadinama tiesės dalis, esanti tarp dviejų taškų.



Atkarpõs apibrėžime yra sąvokos *tiesẽ* ir *tãškas*. Šios sąvokos laikomos pirminėmis, t. y. jos nėra apibrėžiamos.

Galima sakyti, kad geometrija prasideda nuo taško ir tiesės:



Iš taško ir tiesės gauname spindulį ir atkarpą:



Iš pastarųjų figūrų gauname kampą, trikampį, keturkampį, ...:



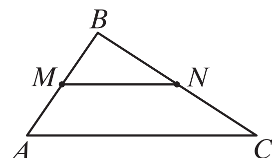
TEOREMA. (Trikampio vidurio linijos savybė.)
Trikampio vidurio linija yra lygiagreti su trikampio kraštine ir yra lygi jos pusei.

Įsitikinkime šio teiginio teisingumu.

Teiginys, kurio teisingumas grindžiamas įrodymu, vadinamas *teoremà*.



Nusibraižykime brėžinį ir remdamiesi juo užrašykime, ką turime įrodyti.



Duota: $\triangle ABC$, $AM = MB$, $CN = NB$.
Įrodyti: $MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$.

Įrodymas.
1) Pastebėkime, kad trikampiai ABC ir MBN yra panašūs pagal dvi atitinkamai proporcingas kraštines ir lygų kampą tarp jų. Iš tikrųjų:

   $\triangle ABC \backsim \triangle MBN$, nes $\frac{AB}{MB} = \frac{CB}{NB} = 2$ (paaiškinkite kodėl)
   ir $\angle B$ — bendras abiem trikampiams.

2) Kadangi $\triangle ABC \backsim \triangle MBN$, o jų panašumo koeficientas lygus 2, tai:

   $\frac{AC}{MN} = 2$, $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle N$ (paaiškinkite kodėl).

3) Iš lygybės $\frac{AC}{MN} = 2$ gauname, kad

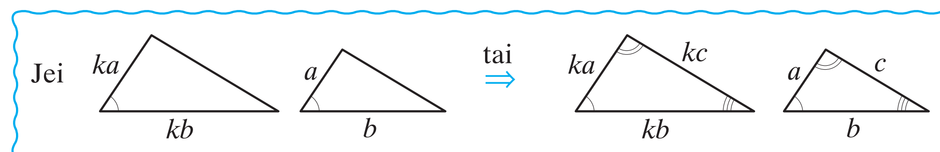
   $MN = \frac{AC}{2}$.

4) Iš lygybės $\angle A = \angle M$ (arba iš lygybės $\angle C = \angle N$) gauname, kad

   $MN \parallel AC$ (paaiškinkite kodėl).

Teorema įrodyta.

Įrodydami šią teoremą rėmėmės kitomis teoremomis. Pavyzdžiui, rėmėmės teorema, kuri vadinama trikampių panašumo požymiu (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų).



Tą teoremą irgi reikia įrodyti. Ją įrodant, vėl teks remtis kitomis teoremomis. Bet be galo taip tęstis negali. Todėl reikalingi teiginiai, kurie laikomi teisingais be įrodymo.

Teiginiai, kurie laikomi teisingais be įrodymo, vadinami *aksiomomis*. (Graikiškai žodis *aksiomà* reiškia akivaizdžią tiesą.)

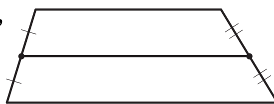


AKSIOMA. *Per du taškus eina vienintelė tiesė.*

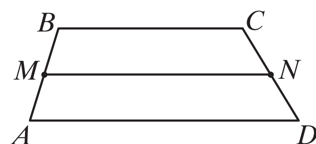
Užduotis. (Projektinis darbas.)
1) Pasidomėkite ir užrašykite daugiau teiginių, kurie laikomi teisingais be įrodymo (aksiomų).
2) Užrašykite keletą jums žinomų apibrėžimų.
3) Užrašykite keletą jums žinomų teoremų. Pabandykite kurią nors iš tų teoremų įrodyti.

Trapecijos vidurio linija

APIBRĖŽIMAS.
Atkarpa, jungianti trapecijos šoninių kraštinių vidurio taškus, vadinama ***trapècijos vìdurio lìnija***.



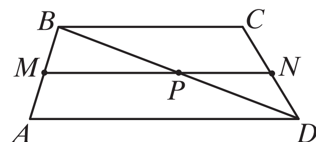
TEOREMA. (Trapecijos vidurio linijos savybė.)
Trapecijos vidurio linija yra lygiagreti su pagrindais ir yra lygi jų sumos pusei.



Duota: $ABCD$ — trapecija ($AD \parallel BC$, $AB \nparallel DC$), $AM = MB$, $DN = NC$.

Įrodyti: $MN \parallel AD(BC)$, $MN = \frac{AD+BC}{2}$.

Įrodymas. 1) Nubrėžkime kurią nors trapecijos įstrižainę, pavyzdžiui, BD.



Įstrižainės ir vidurio linijos sankirtos tašką pažymėkime raide P.

2) Įsitikinkime, kad P yra BD vidurio taškas.

Tarkime priešingai, t. y. kad P nėra BD vidurio taškas. Tada yra toks taškas T, kuris yra BD vidurio taškas (ir T nesutampa su P). Tada MT yra $\triangle ABD$ vidurio linija, o NT yra $\triangle DBC$ vidurio linija. Vadinasi,

$$MT \parallel AD; \quad NT \parallel BC.$$

Kadangi $AD \parallel BC$, tai galima tvirtinti, kad taškai M, T ir N yra vienoje tiesėje, kuri lygiagreti su trapecijos pagrindais.
Tarę, kad P nėra BD vidurio taškas, įsitikinome, kad tada yra ***dvi*** tiesės (MPN ir MTN), einančios per taškus M ir N. Bet juk per du taškus galima nubrėžti tik vieną tiesę (aksioma). Vadinasi, mūsų prielaida, jog P nėra BD vidurys, yra neteisinga. Vadinasi, $BP = PD$.

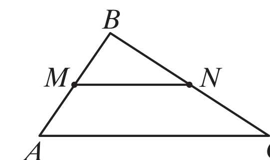
3) Kadangi MP yra trikampio ABD vidurio linija, tai:

$$MP = \frac{AD}{2}, \quad MP \parallel AD.$$

4) Kadangi NP yra trikampio... Pabaikite įrodymą.

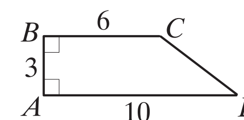
Išspręskite šio puslapio uždavinius, naudodamiesi trikampio ir trapecijos vidurio linijų savybėmis.

1. Trikampio ABC kraštinių ilgiai yra tokie: $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 12$ cm. Atkarpa MN yra trikampio vidurio linija ($AM = MB$, $CN = NB$). Apskaičiuokite:
a) trikampio MBN perimetrą;
b) trapecijos $AMNC$ perimetrą.

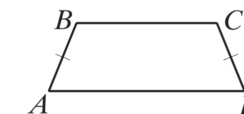


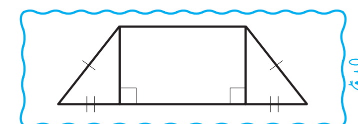
2. Trikampio DEF vidurio linija KL yra lygiagreti su trikampio kraštine DE. Trikampio DEF plotas lygus 48 cm^2. Apskaičiuokite trikampio KLF plotą.

3. Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, apskaičiuokite trapecijos $ABCD$:
a) vidurio linijos ilgį;
b) šoninės kraštinės CD ilgį;
c) perimetrą;
d) plotą.



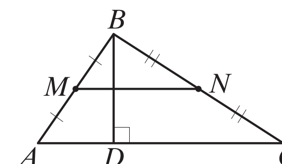
4. Pavaizduota lygiašonė trapecija $ABCD$, kurios šoninė kraštinė lygi 10 dm, o perimetras yra 50 dm. Apskaičiuokite trapecijos:
1) vidurio linijos ilgį;
2) pagrindų ilgius, jei trapecijos aukštinė lygi 6 dm;
3) plotą.

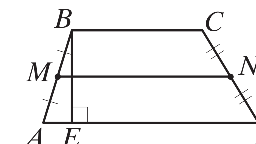




5. Apskaičiuokite trapecijos plotą, jei jos aukštinės ilgis yra 15 mm, o vidurio linijos ilgis — 24 mm.

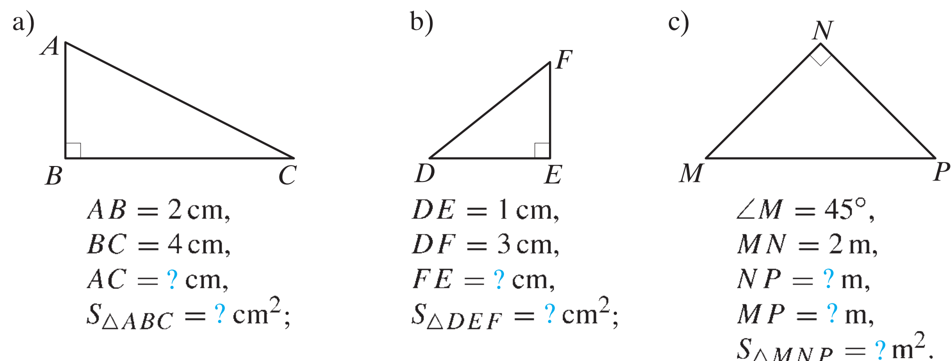
6. Įrodykite formulę.
a) $S_{ABC} = MN \cdot BD$; b) $S_{ABCD} = MN \cdot BE$.



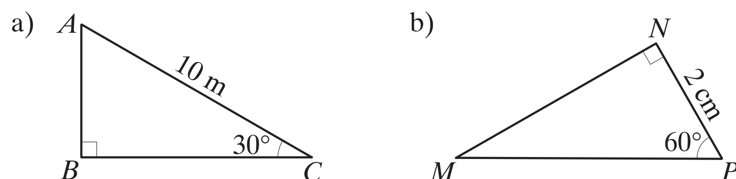


- *Trikampio plotas* yra lygus vidurio linijos ir jai statmenos trikampio aukštinės ilgių sandaugai.
- *Trapecijos plotas* yra lygus vidurio linijos ir aukštinės ilgių sandaugai.

7. Remdamiesi paveikslėlio duomenimis, apskaičiuokite nežinomus stačiojo trikampio kraštinių ilgius ir trikampio plotą.

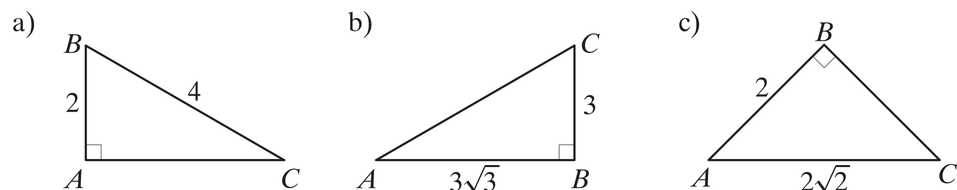


8. Apskaičiuokite pavaizduoto stačiojo trikampio perimetrą ir plotą.



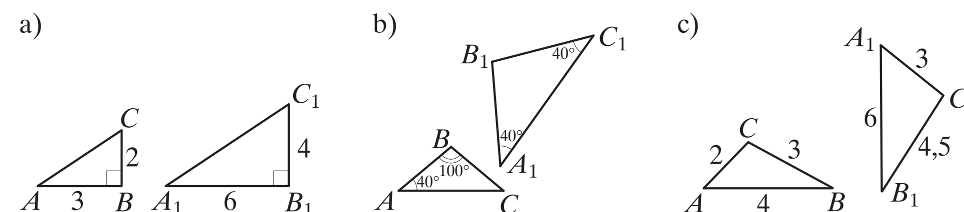
Jei stačiojo trikampio vieno smailiojo kampo dydis lygus 30°, tai statinio, esančio prieš tą kampą, ilgis lygus pusei įžambinės ilgio.

9. Apskaičiuokite pavaizduoto stačiojo trikampio smailiųjų kampų dydžius.

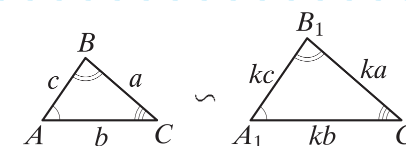


Jei stačiojo trikampio vienas statinis yra dvigubai trumpesnis už įžambinę, tai kampas prieš tą statinį lygus 30°.

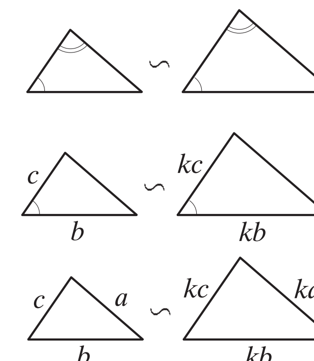
10. Pavaizduoti du trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$.
Paaiškinkite, kodėl galima tvirtinti, kad tie trikampiai yra panašūs.



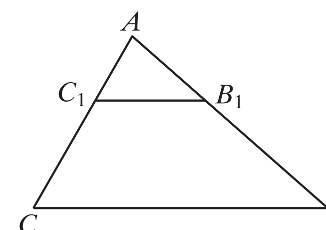
Trikampiai vadinami panašiaisiais, jei jų atitinkami kampai yra lygūs, o kraštinės yra proporcingos.



Trikampių panašumo požymiai
Trikampiai yra panašūs, jei:
1) vieno trikampio du kampai yra lygūs kito trikampio dviem kampams;
2) vieno trikampio dvi kraštinės yra proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių yra lygūs;
3) vieno trikampio visos trys kraštinės yra proporcingos kito trikampio atitinkamoms kraštinėms.



11. Pavaizduotas trikampis ABC. Atkarpa B_1C_1 yra lygiagreti su trikampio kraštine BC. Apskaičiuokite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų.



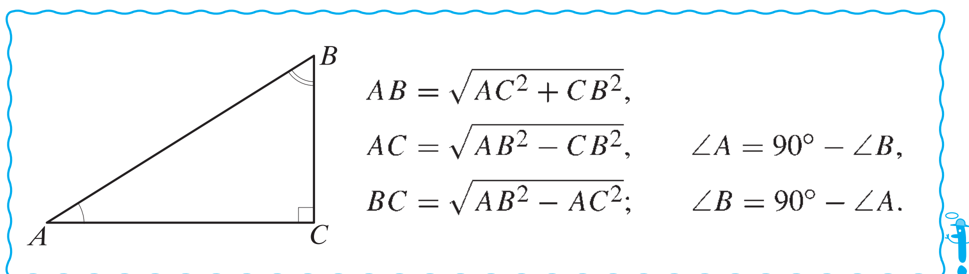
$CB = 10$ cm, $C_1B_1 = 2$ cm,
$AC = 8$ cm, $AC_1 = ?$ cm,
$AB_1 = 1,5$ cm, $AB = ?$ cm,
$P_{\triangle ABC} = ? \cdot P_{\triangle AB_1C_1}$,
$S_{\triangle ABC} = ? \cdot S_{\triangle AB_1C_1}$.

Tiesė, kertanti dvi trikampio kraštines ir lygiagreti su trečiąja, nuo to trikampio atkerta panašų į jį trikampį.

Statusis trikampis

Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$):
- kraštinių ilgius sieja lygybė $AC^2 + BC^2 = AB^2$;
- smailiųjų kampų dydžius sieja lygybė $\angle A + \angle B = 90°$.

Remdamiesi šiomis lygybėmis, galime apskaičiuoti stačiojo trikampio:
- trečiosios kraštinės ilgį, kai žinome kitų dviejų jo kraštinių ilgius;
- smailiojo kampo dydį, kai žinome kito smailiojo kampo dydį.



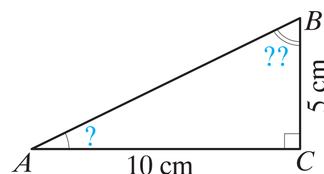
$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$,

$AC = \sqrt{AB^2 - CB^2}$, $\quad \angle A = 90° - \angle B$,

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$; $\quad \angle B = 90° - \angle A$.

1 užduotis.

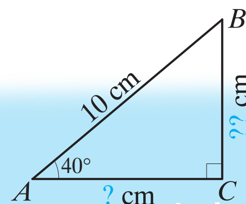
1) Nubraižykite statųjį trikampį ABC ($\angle C = 90°$), kurio $AC = 10$ cm, $BC = 5$ cm.
2) Apskaičiuokite kraštinės AB ilgį.
3) O kaip sužinoti kampų A ir B dydžius? Žinoma, kampus A ir B galite ***išmatuoti***. Bet matuodami dažniausiai gausite tik apytiksles reikšmes...



Šiame skyriuje mokysimės tų kampų dydžius ***apskaičiuoti***!

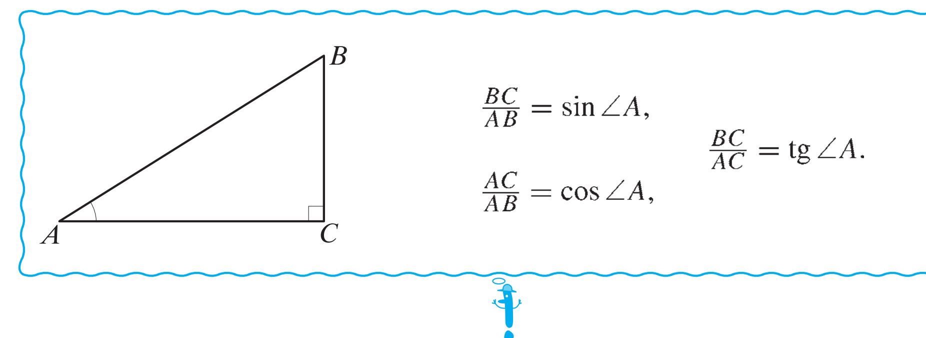
2 užduotis.

1) Nubraižykite statųjį trikampį ABC ($\angle C = 90°$), kurio $AB = 10$ cm, $\angle A = 40°$.
2) Apskaičiuokite kampo B dydį.
3) O kaip sužinoti kraštinių AC ir BC ilgius? Galite matuoti liniuote. Bet ja tikslių ilgių, ko gero, negausite...



Šiame skyriuje mokysimės tų kraštinių ilgius ***apskaičiuoti***!

Stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas



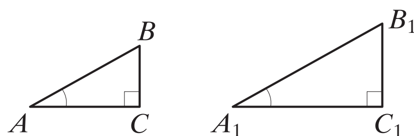
$\frac{BC}{AB} = \sin \angle A$, $\quad \frac{AC}{AB} = \cos \angle A$, $\quad \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \angle A$.

- Šiame skyriuje sužinosime, ką vadiname stačiojo trikampio smailiojo kampo:
  – sinusu;
  – kosinusu;
  – tangentu.
- Mokysimės tas žinias taikyti, ieškodami stačiojo trikampio nežinomų kraštinių ilgių ir kampų dydžių.

6.1. STAČIOJO TRIKAMPIO SMAILIOJO KAMPO SINUSAS

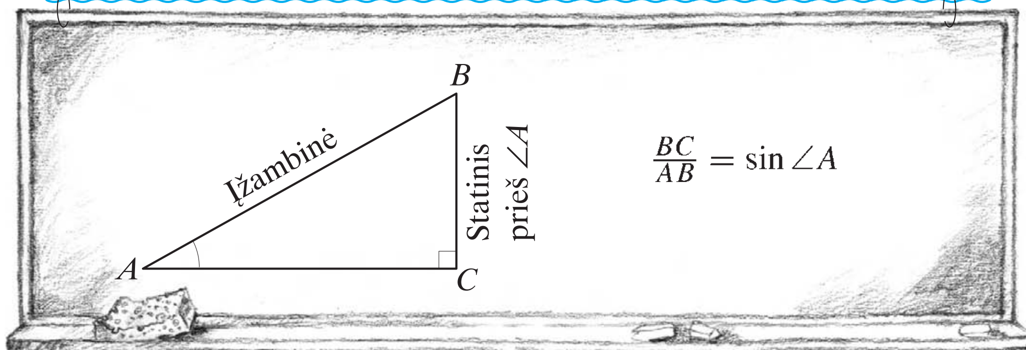
1 užduotis.

1) Nusibraižykite kokį nors statųjį trikampį ABC, kurio $\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$.
2) Išmatuokite statinio, esančio prieš kampą A, ilgį.
3) Išmatuokite įžambinės ilgį.
4) Statinio, esančio prieš kampą A, ilgį padalykite iš įžambinės ilgio.
5) Palyginkite visų klasės mokinių gautus rezultatus.
6) Iš tikrųjų $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$) kraštinių BC ir AB ilgių santykis $\frac{BC}{AB}$ nepriklauso nuo trikampio dydžio, ir visi turėjote gauti tą patį (ar panašų) rezultatą.



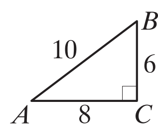
Įsitikinkime, kad $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$: 1) $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (paaiškinkite kodėl);
2) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$ (paaiškinkite kodėl);
3) $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$ (paaiškinkite kodėl).

Skaičių, kurį gauname padaliję ***prieš*** smailųjį kampą esančio statinio ilgį iš įžambinės ilgio, vadiname to smailiojo kampo ***sinusu*** (*rašoma*: sin).



2 užduotis. 1) Užrašykite, kam lygus lentoje pavaizduoto stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) smailiojo kampo B sinusas.

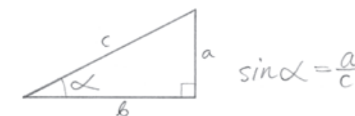
$\sin \angle B = \frac{\text{Statinis prieš } \angle B}{\text{Įžambinė}} = \frac{\dots}{\dots}$



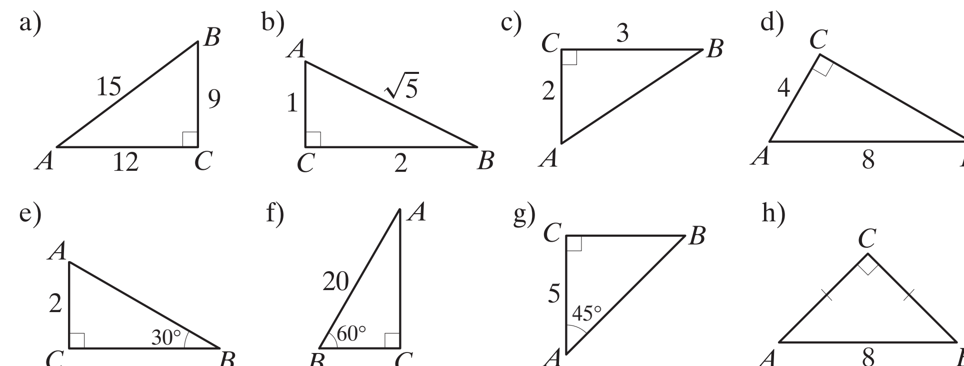
$\sin \angle A = \frac{6}{10} = 0{,}6;$

$\sin \angle B = \frac{8}{10} = 0{,}8.$

2) Apskaičiuokite stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) smailiųjų kampų A ir B sinusų reikšmes, jei $BC = 3$ cm, $AB = 5$ cm.

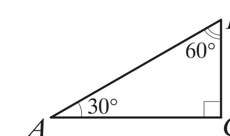


12. Apskaičiuokite pavaizduoto stačiojo trikampio smailiųjų kampų sinusus.



13. 1) Nubraižykite kokius nors stačiuosius $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), kurių: $\angle A = 20°$; $40°$; $60°$; $80°$.
2) Matuodami ir skaičiuodami nustatykite tų trikampių kampų A ir B sinusų apytiksles reikšmes (šimtųjų tikslumu).

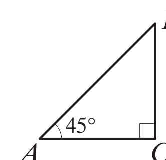
14. Įrodykite, kad:
a) $\sin 30° = \frac{1}{2}$;
b) $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Reikia įrodyti, kad: $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Nubraižykite statųjį $\triangle ABC$, kurio $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$.
2) Statinio, esančio prieš $30°$ kampą, ilgį pažymėkite kokia nors raide, pvz., $BC = a$.
3) Užrašykite, kam lygi įžambinė AB (prisiminkite statinio prieš $30°$ kampą savybę).
4) Apskaičiuokite statinio AC ilgį (remkitės Pitagoro teorema).
5) Apskaičiuokite santykius $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$.

15. Įrodykite, kad $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

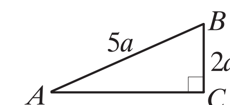


Reikia įrodyti, kad $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Beje, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. Nubraižykite kokį nors statųjį $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), kurio:
a) $\sin \angle A = \frac{2}{3}$;
b) $\sin \angle B = \frac{3}{4}$;
c) $\sin \angle A = 0{,}7$.

Jei $\sin \angle A = \frac{2}{5}$,
tai $\frac{BC}{AB} = \frac{2}{5}$, $\Rightarrow 5\cdot BC = 2\cdot AB$.



17. Paaiškinkite, kodėl stačiojo trikampio smailiojo kampo sinuso reikšmė yra didesnė už 0 ir mažesnė už 1.

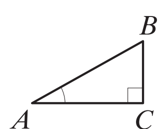
6.2. STAČIOJO TRIKAMPIO SMAILIOJO KAMPO KOSINUSAS

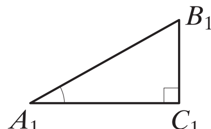
Ankstesniame atverstinyje sužinojome, kad visų stačiųjų trikampių ABC ($\angle C = 90°$), kurių smailieji kampai A yra vienodi, ***prieš*** $\angle A$ esančio statinio ilgio santykis su įžambinės ilgiu yra toks pats. Tas santykis $\frac{BC}{AB}$ vadinamas kampo A sinusu.

Šiame atverstinyje kalbėsime apie kito statinio (esančio ***prie*** $\angle A$) ilgio santykį su įžambinės ilgiu: $\frac{AC}{AB}$.



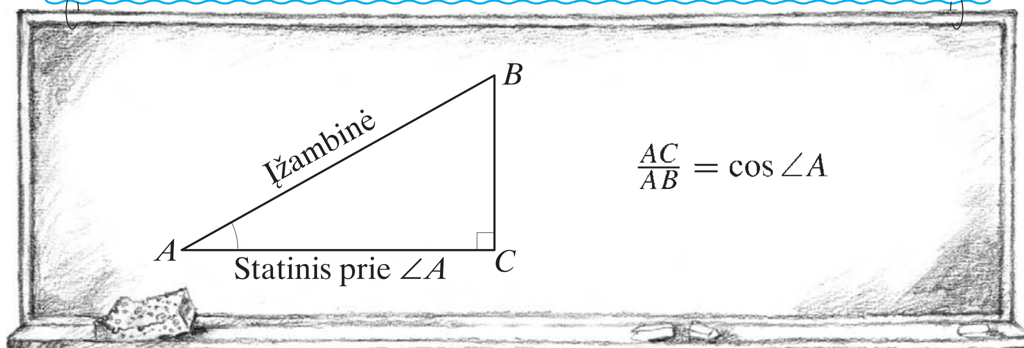
1 užduotis. Pavaizduoti statieji trikampiai, kurių $\angle A = \angle A_1$. Paaiškinkite, kodėl yra teisinga lygybė:





$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}.$$

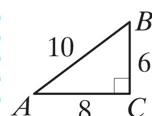
Skaičius, kurį gauname padaliję ***prie*** smailiojo kampo esančio statinio ilgį iš įžambinės ilgio, vadinamas to smailiojo kampo ***kòsinusu*** (*rašoma*: cos).



2 užduotis.

1) Užrašykite, kam lygus lentoje pavaizduoto stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) smailiojo kampo B kosinusas.

$$\cos\angle B = \frac{\text{Statinis prie } \angle B}{\text{Įžambinė}} = \frac{\dots}{\dots}$$

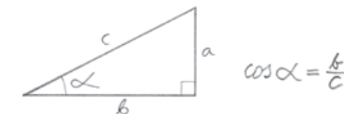


10, 6, 8 — A, B, C:

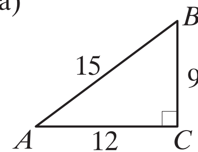
$\cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = 0{,}8;$

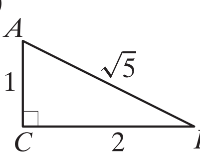
$\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$

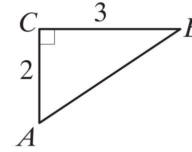
2) Apskaičiuokite stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) smailiųjų kampų A ir B kosinusų reikšmes, jei $AC = 4$ cm, $AB = 5$ cm.

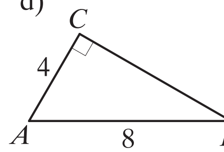


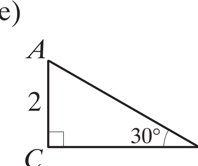
18. Apskaičiuokite pavaizduoto stačiojo trikampio smailiųjų kampų kosinusus.

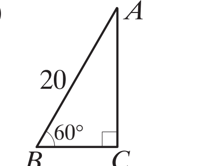
a) 

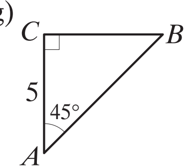
b) 

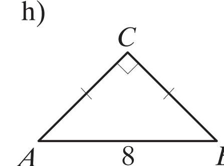
c) 

d) 

e) 

f) 

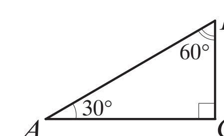
g) 

h) 

19. Įrodykite, kad:

a) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos 60° = \frac{1}{2}$.



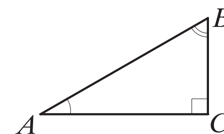
Reikia įrodyti, kad: $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$.

20. Įrodykite, kad $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

21. Nubraižykite kokį nors statųjį $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), kurio:

a) $\cos\angle A = \frac{2}{3}$; b) $\cos\angle B = \frac{2}{5}$; c) $\cos\angle A = 0{,}4$.

22. Įrodykite, kad stačiojo trikampio smailiojo kampo sinuso reikšmės kvadrato ir to kampo kosinuso reikšmės kvadrato suma lygi 1.



Įrodykite, kad $(\sin\angle A)^2 + (\cos\angle A)^2 = 1$.

Įrodykime, kad $(\sin\angle B)^2 + (\cos\angle B)^2 = 1$.

$$\sin\angle B = \frac{AC}{AB}, \quad \cos\angle B = \frac{BC}{AB},$$

$$(\sin\angle B)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{AC^2}{AB^2}, \quad (\cos\angle B)^2 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Vadinasi, reikia įrodyti, kad $\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = 1$. Iš tikrųjų:

$$\frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

23. Paaiškinkite, kodėl stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinuso reikšmė negali būti lygi neigiamam skaičiui; būti lygi 0; būti didesnė už 1.

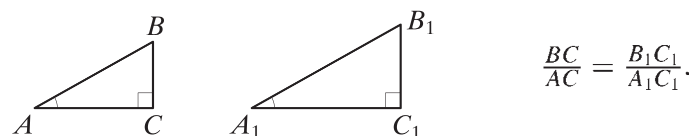
6.3. STAČIOJO TRIKAMPIO SMAILIOJO KAMPO TANGENTAS

Ankstesniuose atverstiniuose nagrinėjome stačiojo trikampio statinių ilgių santykius su įžambinės ilgiu.

Šiame atverstinyje kalbėsime apie statinio, esančio prieš smailųjį kampą, ilgio santykį su kito statinio ilgiu.

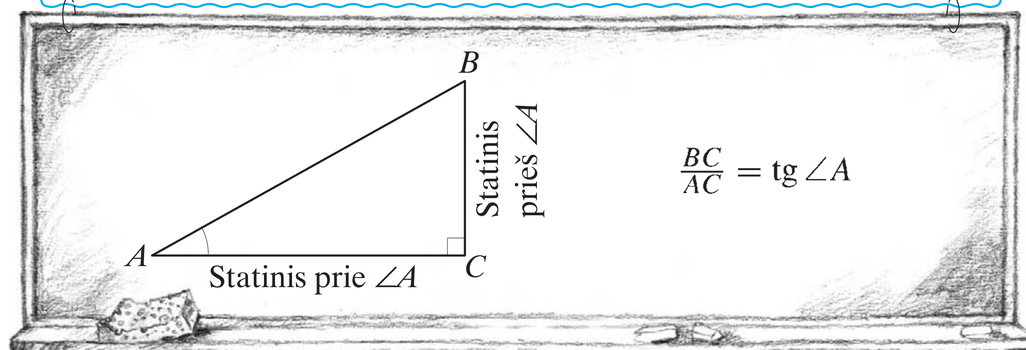


1 užduotis. Pavaizduoti statieji trikampiai, kurių $\angle A = \angle A_1$. Paaiškinkite, kodėl yra teisinga lygybė:



$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}.$$

Skaičių, kurį gauname padaliję ***prieš*** smailųjį kampą esančio statinio ilgį iš kito statinio ilgio, vadiname to smailiojo kampo ***tángentu*** (*rašoma*: tg).



2 užduotis.

1) Užrašykite, kam lygus lentoje pavaizduoto stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) smailiojo kampo B tangentas.

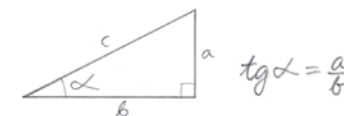
$$\text{tg}\,\angle B = \frac{\text{Statinis prieš } \angle B}{\text{Statinis prie } \angle B} = \frac{\dots}{\dots}$$



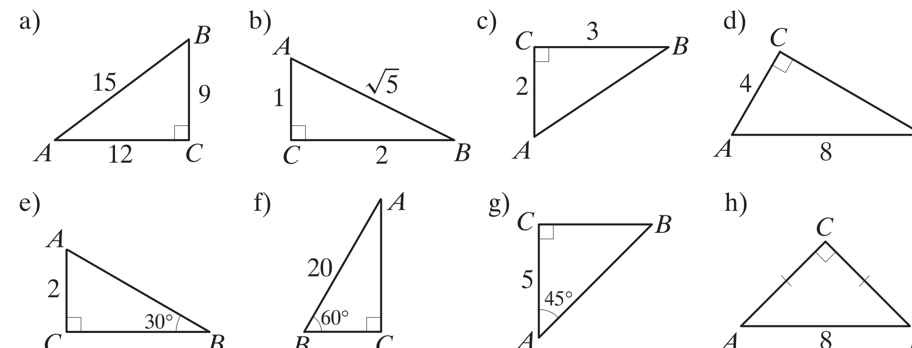
$\text{tg}\,\angle A = \frac{6}{8} = 0{,}75;$

$\text{tg}\,\angle B = \frac{8}{6} = 1{,}(3).$

2) Apskaičiuokite stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) smailiųjų kampų A ir B tangentų reikšmes, jei $AC = 4$ cm, $CB = 3$ cm.



24. Apskaičiuokite pavaizduoto stačiojo trikampio smailiųjų kampų tangentus.

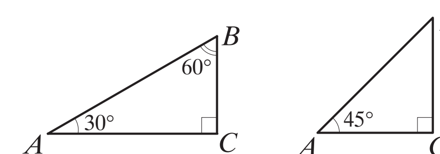


25. Įrodykite, kad:

a) $\text{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

b) $\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$;

c) $\text{tg}\,45° = 1$.

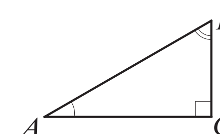


26. 1) Nubraižykite kokį nors statųjį trikampį ABC ($\angle C = 90°$), kurio:

a) $\text{tg}\,\angle A = \frac{1}{2}$; b) $\text{tg}\,\angle B = 3$; c) $\text{tg}\,\angle A = 0{,}6$; d) $\text{tg}\,\angle B = 2{,}5$.

2) Apskaičiuokite to trikampio $\sin\angle A$; $\cos\angle B$.

27. Įrodykite, kad stačiojo trikampio smailiojo kampo tangento reikšmė yra lygi to kampo sinuso reikšmei, padalytai iš to kampo kosinuso reikšmės.



Įrodykite, kad $\text{tg}\,\angle A = \frac{\sin\angle A}{\cos\angle A}$.



Įrodykime, kad $\text{tg}\,\angle B = \frac{\sin\angle B}{\cos\angle B}$.

$$\text{tg}\,\angle B = \frac{AC}{BC}, \quad \sin\angle B = \frac{AC}{AB}, \quad \cos\angle B = \frac{BC}{AB}.$$

Vadinasi, reikia įrodyti, kad $\frac{AC}{BC} = \frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB}$.

Iš tikrųjų:

$$\frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}.$$



28. Ar gali stačiojo trikampio smailiojo kampo tangento reikšmė būti didesnė už 1? už 2? už 100?

29. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\sin 30° + \cos 30° + \text{tg}\,30°$; b) $2 \cdot \sin 45° + \cos 60° - \frac{\text{tg}\,45°}{2}$.

6.4. KAIP RASTI KAMPO DYDĮ, ŽINANT JO SINUSO, KOSINUSO AR TANGENTO REIKŠMĘ

Kai žinome stačiojo trikampio kurio nors smailiojo kampo sinuso, kosinuso ar tangento reikšmę, tai galime sužinoti ir to kampo dydį laipsniais.

Ir, atvirkščiai, žinodami smailiojo kampo dydį laipsniais, galime sužinoti to kampo sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes.

Kampų $1°, 2°, 3°, \ldots, 89°$ sinusų, kosinusų ir tangentų reikšmių lentelė pateikta 23 puslapyje.

Užduotis. Naudodamiesi skaičiuotuvu ir lentele, raskite:

a) $\sin\angle A$, $\cos\angle A$ ir $\operatorname{tg}\angle A$ reikšmes, kai $\angle A = 25°$; $\angle A = 37°$; $\angle A = 86°$.

b) $\angle A$ dydį laipsniais, kai $\sin\angle A = 0{,}191$; $\cos\angle A = \frac{2}{5}$; $\operatorname{tg}\angle A = 2$.

Raskime $\sin\angle A$, *kai* $\angle A = 40°$.

1) Naudokimės lentele (žr. p. 23). Pirmajame stulpelyje ($\alpha =$) randame eilutę, kurioje yra reikšmė $40°$. Stulpelyje $\sin\alpha \approx$ toje eilutėje įrašytas skaičius 0,643. Vadinasi,

$$\sin 40° \approx 0{,}643.$$

2) Skaičiuotuvu $\sin 40°$ reikšmę randame taip:

- Pasirenkame skaičiuotuvo aplinką DEG:
- Įvedame skaičių 40:
- Spustelėję mygtuką sin, gauname apytikslę $\sin 40°$ reikšmę:

DEG 0	DEG 40	DEG 0.642787609

Skaičiuotuvu raskime $\angle A$ *dydį, kai* $\cos\angle A = 0{,}7$.

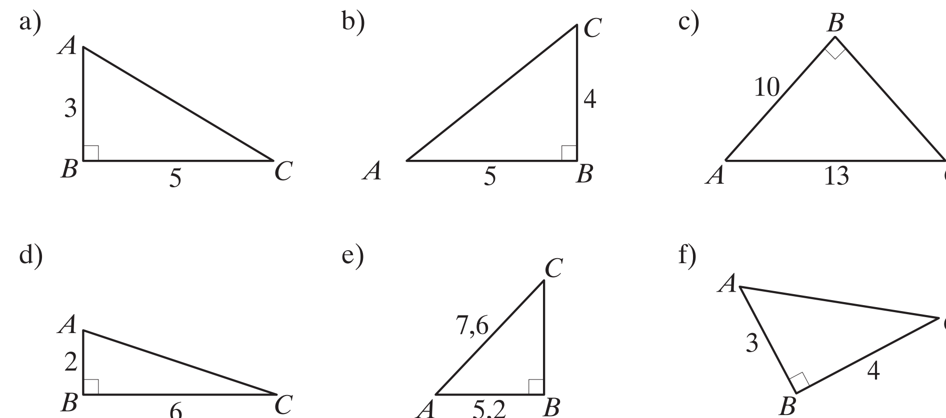
- Aplinkoje DEG įvedame skaičių 0,7:
- Pasirenkame aplinką 2ndF:
- Spustelėję mygtuką $\cos^{-1}$, gauname apytikslę $\angle A$ reikšmę:

DEG 0.7	2ndF DEG 0.7	2ndF DEG 45.572996

Vadinasi, $\angle A \approx 46°$.



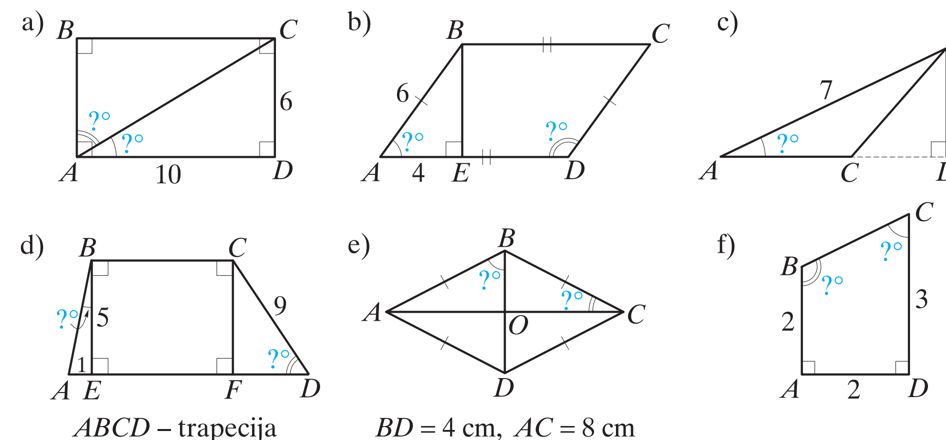
30. Nustatykite stačiojo $\triangle ABC$ smailiųjų kampų dydžių apytiksles reikšmes ($1°$ tikslumu) ir apskaičiuokite nežinomos kraštinės ilgį.



Apskaičiuokite kurio nors smailiojo kampo sin, cos arba tg reikšmę. Tada iš lentelės arba skaičiuotuvu raskite apytikslį to kampo dydį laipsniais.

31. Naudodamiesi skaičiuotuvu arba lentele, apskaičiuokite trikampio ABC ($\angle C = 90°$, $AC = 10$ cm, $BC = 5$ cm, žr. p. 10, 1 užduotį) apytiksles kampų A ir B dydžių reikšmes.

32. Apskaičiuokite klaustukais pažymėtų kampų dydžius ($1°$ tikslumu).

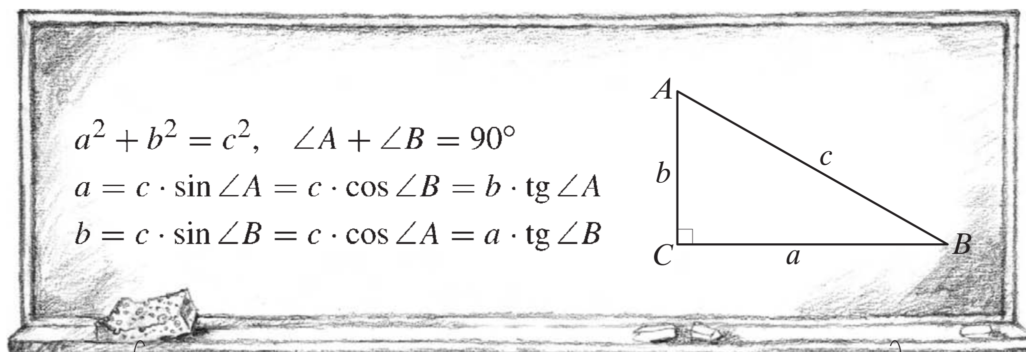


$ABCD$ – trapecija

$BD = 4$ cm, $AC = 8$ cm

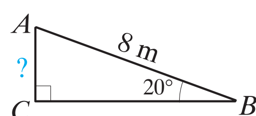
Rombo įstrižainės kertasi stačiu kampu ir viena kitą dalija pusiau.

6.5. DAR KARTĄ STATIEJI TRIKAMPIAI



Žinant stačiojo trikampio vienos kraštinės ilgį ir smailiojo kampo dydį, galima apskaičiuoti kitų dviejų kraštinių ilgius.

1 užduotis. Apskaičiuokite stačiojo $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) statinio AC ilgį (0,1 cm tikslumu), kai įžambinė $AB = 10$ cm, o $\angle B = 50°$.

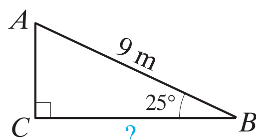


Iš lygybės $\frac{AC}{AB} = \sin 20°$ gauname:

$AC = AB \cdot \sin 20° = 8 \cdot \sin 20°$.

Vadinasi, $AC \approx 8 \cdot 0{,}342 = 2{,}736 \approx 2{,}7$ (m).

2 užduotis. Apskaičiuokite stačiojo $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) statinio BC ilgį (0,1 cm tikslumu), kai įžambinė $AB = 5$ cm, o $\angle B = 70°$.

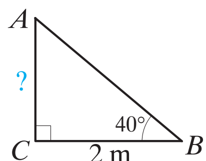


Iš lygybės $\frac{CB}{AB} = \cos 25°$ gauname:

$CB = AB \cdot \cos 25° = 9 \cdot \cos 25°$.

Vadinasi, $CB \approx 9 \cdot 0{,}906 = 8{,}154 \approx 8{,}2$ (m).

3 užduotis. Apskaičiuokite stačiojo $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) statinio AC ilgį (0,1 cm tikslumu), kai kitas statinis $BC = 8$ cm, o $\angle B = 65°$.



Iš lygybės $\frac{AC}{BC} = \text{tg}\,40°$ gauname:

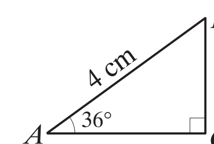
$AC = BC \cdot \text{tg}\,40° = 2 \cdot \text{tg}\,40°$.

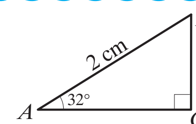
Vadinasi, $AC \approx 2 \cdot 0{,}839 = 1{,}678 \approx 1{,}7$ (m).



33. Remdamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite:

1) tikslią statinio AC ilgio reikšmę;
2) tikslią statinio BC ilgio reikšmę;
3) tikslias trikampio perimetro P ir ploto S reikšmes;
4) apytiksles AC, BC, P ir S reikšmes (0,1 tikslumu).



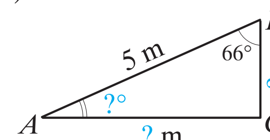


1) $AC = 2 \cdot \cos 32°$ (cm);
2) $BC = 2 \cdot \sin 32°$ (cm);
3) $P = 2 + 2 \cdot \cos 32° + 2 \cdot \sin 32°$ (cm), $S = 2 \cdot \sin 32° \cdot \cos 32°$ (cm^2);
4) $AC \approx 2 \cdot 0{,}848 = 1{,}696 \approx 1{,}7$ (cm), $BC \approx 2 \cdot 0{,}530 = 1{,}06 \approx 1{,}1$ (cm), $P \approx 2 + 1{,}7 + 1{,}1 = 4{,}8$ (cm), $S \approx 2 \cdot 0{,}848 \cdot 0{,}53 = 0{,}89888 \approx 0{,}9$ (cm^2).

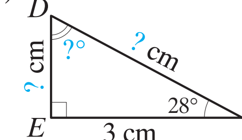
34. Apskaičiuokite trikampio ABC ($\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$, $AB = 10$ cm, žr. p. 10, 2 uždavinį) statinių ilgių tikslias ir apytiksles reikšmes (dešimtųjų tikslumu).

35. Apskaičiuokite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų. Atsakyme surašykite tikslias reikšmes.

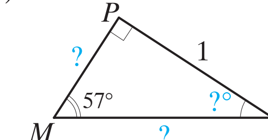
a)



b)

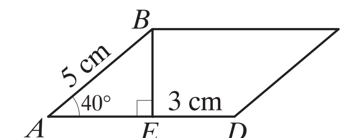


c)



36. Pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$ ($AB = 5$ cm, $\angle A = 40°$). Nubrėžta jo aukštinė BE ($ED = 3$ cm).

1) Kam lygūs lygiagretainio kampų B, C ir D dydžiai?
2) Apskaičiuokite BE, AE, P_{ABCD}, S_{ABCD} apytiksles reikšmes (0,1 tikslumu).

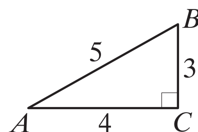


Keturkampis, kurio priešingos kraštinės yra lygiagrečios, vadinamas *lygiagretainiu.*
Lygiagretainio priešingos kraštinės yra lygios ir priešingi kampai yra lygūs.
Lygiagretainio plotas yra lygus jo kraštinės ir aukštinės, nubrėžtos į tą kraštinę, ilgių sandaugai.

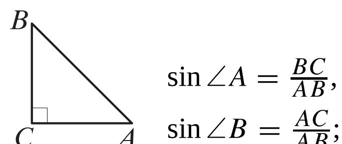
APIBENDRINAME

Stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas

Stačiojo trikampio smailiojo kampo:



- ***sìnusu*** vadiname prieš tą kampą esančio statinio ilgio santykį su įžambinės ilgiu:

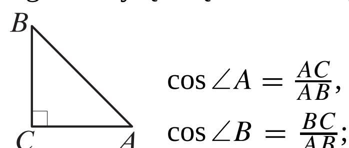


$\sin\angle A = \frac{BC}{AB}$,

$\sin\angle B = \frac{AC}{AB}$;

$\sin\angle A = \frac{3}{5}$, $\sin\angle B = \frac{4}{5}$;

- ***kòsinusu*** vadiname prie to kampo esančio statinio ilgio santykį su įžambinės ilgiu:

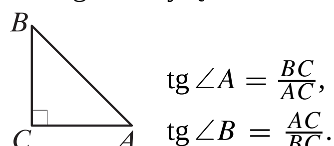


$\cos\angle A = \frac{AC}{AB}$,

$\cos\angle B = \frac{BC}{AB}$;

$\cos\angle A = \frac{4}{5}$, $\cos\angle B = \frac{3}{5}$;

- ***tángentu*** vadiname prieš tą kampą esančio statinio ilgio santykį su kito statinio ilgiu:



$\operatorname{tg}\angle A = \frac{BC}{AC}$,

$\operatorname{tg}\angle B = \frac{AC}{BC}$.

$\operatorname{tg}\angle A = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\angle B = \frac{4}{3}$.

Smailiojo kampo sinuso ir kosinuso reikšmės yra intervalo (0; 1) skaičiai, o tangento reikšmės yra intervalo (0; $+\infty$) skaičiai.

Kai $\angle A \in (0; 90°)$, tai:
$0 < \sin\angle A < 1$,
$0 < \cos\angle A < 1$,
$\operatorname{tg}\angle A > 0$.

Verta įsiminti!

$\angle A =$	30°	45°	60°
$\sin\angle A =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\angle A =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\angle A =$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

To paties kampo sinuso, kosinuso ir tangento ryšiai

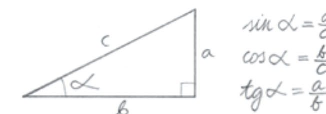
$(\sin\angle A)^2 + (\cos\angle A)^2 = 1$,

$\frac{\sin\angle A}{\cos\angle A} = \operatorname{tg}\angle A$.

$(\sin\angle A)^2 = \sin^2\angle A$

$\left(\sin 30°\right)^2 + \left(\cos 30°\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$

$\frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30°.$



Smailiųjų kampų sinusų, kosinusų ir tangentų reikšmių lentelė

$\alpha =$	$\sin\alpha \approx$	$\cos\alpha \approx$	$\operatorname{tg}\alpha \approx$	$\alpha =$	$\sin\alpha \approx$	$\cos\alpha \approx$	$\operatorname{tg}\alpha \approx$
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,331
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

SPRENDŽIAME

37. Apskaičiuokite stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) nežinomų kraštinių ilgius ir kampų dydžius (1° tikslumu), kai:

1) žinomas įžambinės ilgis ir vieno smailiojo kampo dydis:
   a) $AB = 120$ mm, $\angle A = 25°$; b) $AB = 85$ dm, $\angle B = 33°$.
2) žinomas vieno statinio ilgis ir vieno smailiojo kampo dydis:
   a) $CB = 70$ m, $\angle A = 48°$; b) $AC = 44$ cm, $\angle B = 70°$.
3) žinomi vieno statinio ir įžambinės ilgiai:
   a) $AC = 24$, $AB = 35$; b) $AB = \sqrt{101}$, $BC = \sqrt{51}$.
4) žinomi statinių ilgiai:
   a) $AC = 82$, $BC = 40$; b) $AC = BC = 2\sqrt{13}$.

Atsakymus parašykite suapvalintus iki vienetų.

38. Nesinaudodami skaičiuotuvu ir lentele, nubraižykite kampą A. Tada išmatuokite jo dydį matlankiu, kai:

a) $\sin\angle A = \frac{3}{5}$; b) $\cos\angle A = \frac{2}{5}$; c) $\operatorname{tg}\angle A = 1\frac{1}{4}$.

Gautus rezultatus patikrinkite naudodamiesi skaičiuotuvu ar lentele.

39. Įrodykite, kad stačiajam trikampiui ABC ($\angle C = 90°$) teisinga lygybė $(\sin\angle A)^2 + (\sin\angle B)^2 = 1$.

40. Surašykite skaičius didėjimo tvarka.

a) $\sin 20°$, $\sin 41°$, $\sin 15°$, $\sin 73°$; b) $\cos 20°$, $\cos 41°$, $\cos 15°$, $\cos 73°$;

c) $\operatorname{tg} 20°$, $\operatorname{tg} 41°$, $\operatorname{tg} 15°$, $\operatorname{tg} 73°$; d) $\sin 25°$, $\cos 25°$, $\operatorname{tg} 25°$, $\operatorname{tg} 45°$.

41. Įrodykite, kad stačiajam trikampiui ABC ($\angle C = 90°$) teisingos lygybės.

a) $\sin\angle A = \cos\angle B$, $\sin(90° - \angle A) = \cos\angle A$;
b) $\sin\angle B = \cos\angle A$, $\cos(90° - \angle A) = \sin\angle A$.

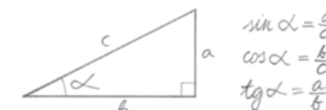
42. Įrodykite, kad:

a) $1 + (\operatorname{tg}\alpha)^2 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}$; b) $(\cos\alpha)^2 = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}\alpha)^2}$; c) $(\sin\alpha)^2 = \frac{(\operatorname{tg}\alpha)^2}{1+(\operatorname{tg}\alpha)^2}$.

43. Apskaičiuokite x reikšmę (dešimtųjų tikslumu).

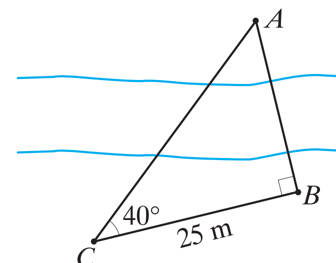
a) b) c)

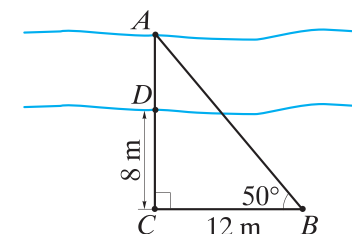
d) e) f)



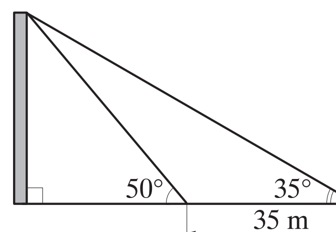
44. Apskaičiuokite rombo $ABCD$ kampų dydžius (laipsnio tikslumu) ir kraštinės ilgį, kai jo įstrižainių ilgiai yra $AC = 14$ cm, $BD = 10$ cm.

45. a) Apskaičiuokite atstumą tarp A ir B. b) Apskaičiuokite upės plotį.



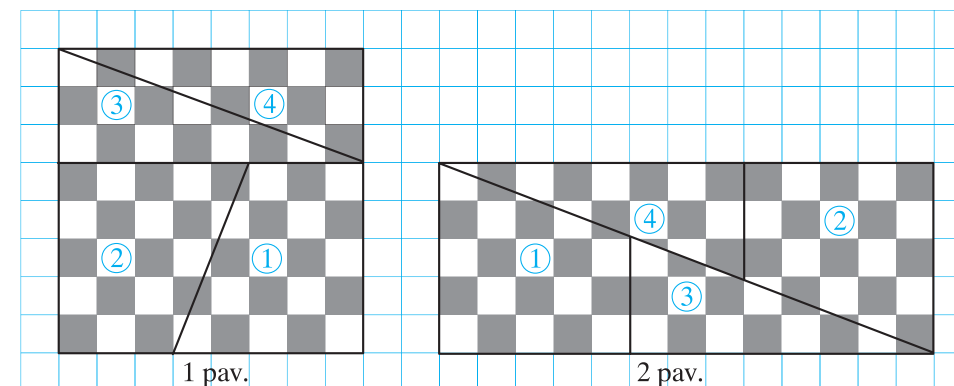


c) Apskaičiuokite stulpo aukštį.





46. ***Kodėl padidėjo lentos plotas?***

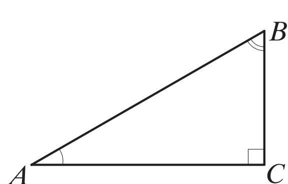


Šachmatų lenta (jos matmenys 8×8) supjaustyta į 4 dalis taip, kaip parodyta 1 pav. Iš tų 4 dalių sudėta stačiakampė lenta (jos matmenys 5×13), kaip parodyta 2 pav.

1 pav. lentos plotas yra $8 \times 8 = 64$ langeliai.
2 pav. lentos plotas yra $5 \times 13 = 65$ langeliai.

Smailiojo kampo sekantas, kosekantas ir kotangentas

Turint statųjį trikampį ABC ($\angle C = 90°$), galima užrašyti šešis kraštinių ilgių santykius:



1) $\frac{BC}{AB}$, 2) $\frac{AC}{AB}$, 3) $\frac{BC}{AC}$,

4) $\frac{AB}{BC}$, 5) $\frac{AB}{AC}$, 6) $\frac{AC}{BC}$.

Mes jau žinome, kad matematikai tris pirmuosius santykius „pakrikštijo“ kampo A sinusu, kosinusu ir tangentu:

$$\frac{BC}{AB} = \sin \angle A, \quad \frac{AC}{AB} = \cos \angle A, \quad \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \angle A.$$

Kiti likę trys santykiai kampo A atžvilgiu taip pat turi savo pavadinimus ir žymenis:

$$\frac{AB}{BC} = \operatorname{cosec} \angle A, \quad \frac{AB}{AC} = \sec \angle A, \quad \frac{AC}{BC} = \operatorname{ctg} \angle A.$$

Kitaip sakant, su stačiojo trikampio smailiuoju kampu yra susiję 6 skaičiai:
- sinusas — santykis statinio ilgio *prieš* tą kampą su įžambinės ilgiu;
- kosinusas — santykis statinio ilgio *prie* to kampo su įžambinės ilgiu;
- tangentas — santykis statinio ilgio *prieš* tą kampą su kito statinio ilgiu;
- kosèkantas — santykis įžambinės ilgio su *prieš* tą kampą esančio statinio ilgiu;
- sèkantas — santykis įžambinės ilgio su *prie* to kampo esančio statinio ilgiu;
- kotángentas — santykis statinio ilgio *prie* to kampo su kito statinio ilgiu.

Santykiai $\frac{BC}{AB}$ ir $\frac{AB}{BC}$ yra vienas kitam atvirkštiniai, todėl

$$\operatorname{cosec} \angle A = \frac{1}{\sin \angle A}, \quad \sec \angle A = \frac{1}{\cos \angle A}, \quad \operatorname{ctg} \angle A = \frac{1}{\operatorname{tg} \angle A}.$$

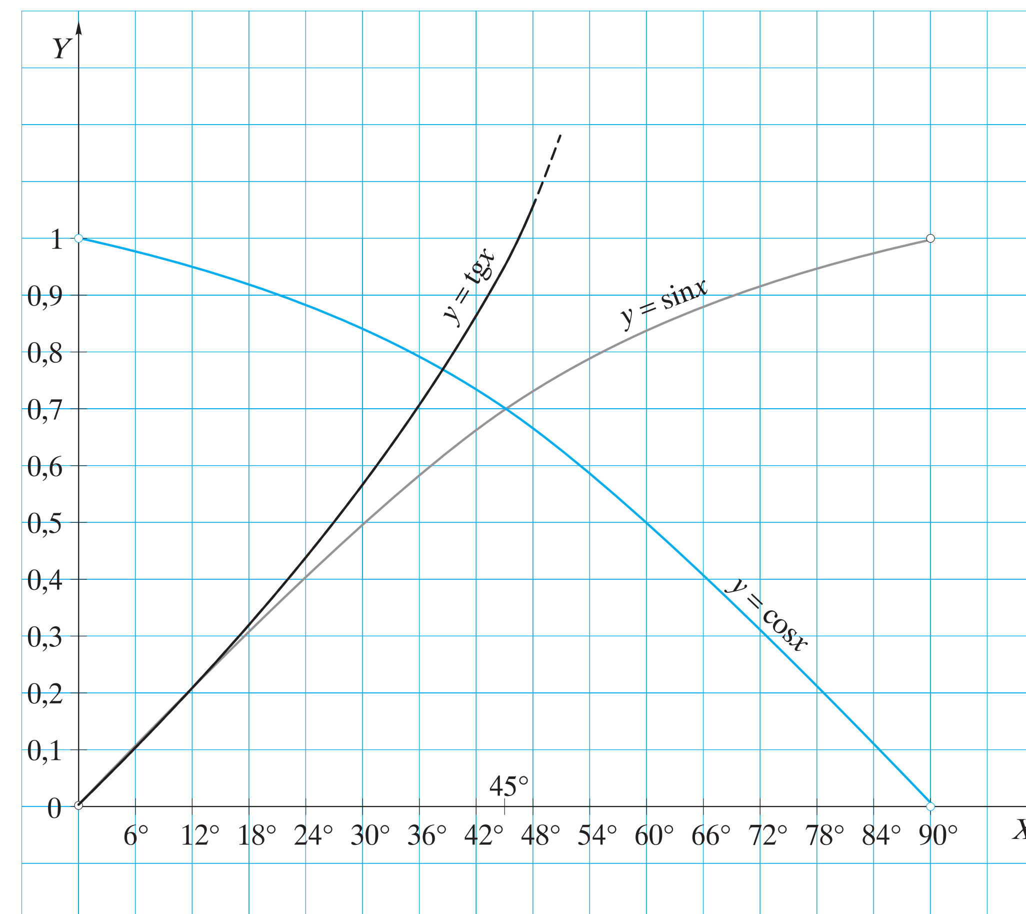
Taigi šių trijų santykių (cosec, sec, ctg) prisireikia retai.

Vėlesnėse klasėse naudosimės kotangentu.



Funkcijos $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, kai $x \in (0°; 90°)$

Nagrinėkime, kaip keičiasi $\sin x$ reikšmė y, kampui x didėjant nuo 0° iki 90°. Kitaip sakant, nagrinėkime funkciją $y = \sin x$, kai $x \in (0°; 90°)$.
Koordinačių plokštumoje sužymėję taškus $(x; \sin x)$, gausime $y = \sin x$ grafiką. Matome, kad x reikšmėms didėjant y reikšmės didėja nuo 0 iki 1.
Funkcijos $y = \sin x$ apibrėžimo sritis yra $x \in (0°; 90°)$, reikšmių sritis — $y \in (0; 1)$.
Funkcija yra didėjanti.



Užduotis. Apibūdinkite funkcijas $y = \cos x$ ir $y = \operatorname{tg} x$, kai $x \in (0°; 90°)$.

Vėlesnėse klasėse nagrinėsime funkcijas
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, kai $x \in (-\infty; +\infty)$.



TESTAS

47. Pabaikite sakinį.

a) Stačiojo trikampio smailiojo kampo sinusu vadiname...
b) Stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusu vadiname...
c) Stačiojo trikampio smailiojo kampo tangentu vadiname...

A statinio, esančio prieš tą kampą, ilgio santykį su kito statinio ilgiu
B statinio, esančio prieš tą kampą, ilgio santykį su įžambinės ilgiu
C statinio, esančio prie to kampo, ilgio santykį su kito statinio ilgiu
D statinio, esančio prie to kampo, ilgio santykį su įžambinės ilgiu

48.

a) $\sin\angle A =$ **A** $\frac{4}{5}$ **B** $\frac{3}{5}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$
b) $\cos\angle A =$ **A** $\frac{4}{5}$ **B** $\frac{3}{5}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$
c) $\operatorname{tg}\angle A =$ **A** $\frac{4}{5}$ **B** $\frac{3}{5}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$

49.

a) $\sin\angle A =$ **A** $\frac{AC}{AB}$ **B** $\frac{BC}{AB}$ **C** $\frac{AC}{BC}$ **D** $\frac{BC}{AC}$
b) $\cos\angle B =$ **A** $\frac{AC}{AB}$ **B** $\frac{BC}{AB}$ **C** $\frac{AC}{BC}$ **D** $\frac{BC}{AC}$
c) $\operatorname{tg}\angle A =$ **A** $\frac{AC}{AB}$ **B** $\frac{BC}{AB}$ **C** $\frac{AC}{BC}$ **D** $\frac{BC}{AC}$

50. a) $\sin 30^\circ =$ **A** $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** Kitas atsakymas

b) $\cos 45^\circ =$ **A** $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** Kitas atsakymas

c) $\operatorname{tg} 60^\circ =$ **A** $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** Kitas atsakymas

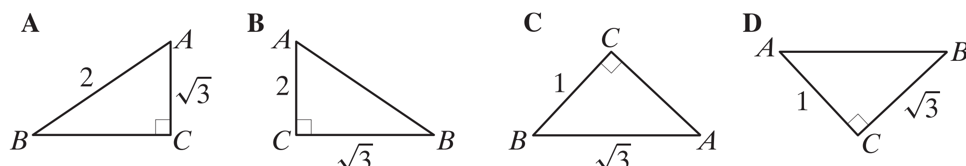
51.

a) $AC =$ **A** $2\cdot\sin 65^\circ$ **B** $2\cdot\cos 65^\circ$ **C** $2\cdot\operatorname{tg} 65^\circ$
b) $BC =$ **A** $2\cdot\cos 25^\circ$ **B** $2\cdot\sin 25^\circ$ **C** $2\cdot\operatorname{tg} 25^\circ$

52.

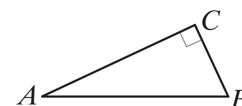
a) $AB =$ **A** 5 cm **B** $5\sqrt{3}$ cm **C** 0,5 cm **D** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
b) $AC =$ **A** 5 cm **B** $5\sqrt{3}$ cm **C** 0,5 cm **D** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

53. Kuriame iš pavaizduotų trikampių kampo A sinuso reikšmė lygi $\frac{\sqrt{3}}{2}$?





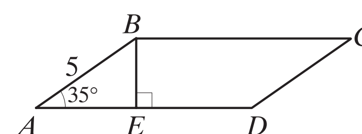
54.



a) $CB =$
A $AB\cdot\sin\angle B$ **B** $AB\cdot\cos\angle A$ **C** $AB\cdot\cos\angle B$ **D** $AB\cdot\operatorname{tg}\angle B$

b) $CB =$
A $AC\cdot\operatorname{tg}\angle A$ **B** $AC\cdot\operatorname{tg}\angle B$ **C** $AC\cdot\cos\angle B$ **D** $AC\cdot\sin\angle A$

55.



$ABCD$ — lygiagretainis,
$AB = 5$ cm, $AD = 10$ cm,
$\angle A = 35^\circ$.

Jei $\sin 35^\circ \approx 0{,}6$, $\cos 35^\circ \approx 0{,}8$, $\operatorname{tg} 35^\circ \approx 0{,}7$, tai:

a) $BE =$ **A** 3 cm **B** 4 cm **C** 3,5 cm **D** 6 cm
b) $AE =$ **A** 3 cm **B** 4 cm **C** 3,5 cm **D** 6 cm
c) $S_{ABCD} =$ **A** 60 cm^2 **B** 30 cm^2 **C** 40 cm^2 **D** 35 cm^2

56. Kam lygi reiškinio reikšmė?

a) $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ$ **A** $\sqrt{3}$ **B** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **D** 1

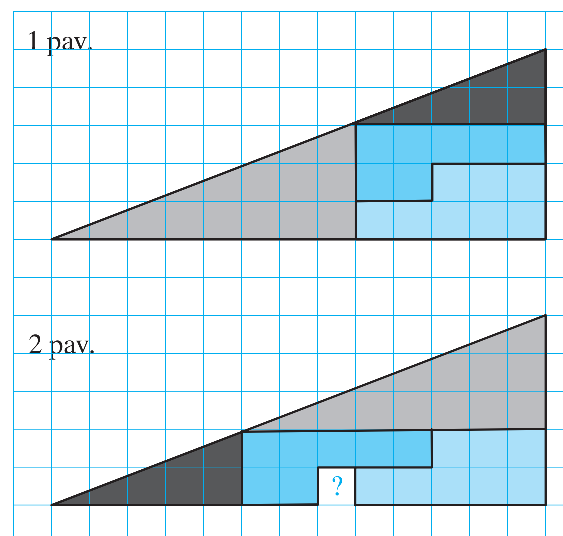
b) $\operatorname{tg} 45^\circ + 2\cdot\sin 30^\circ$ **A** $\frac{3}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ **C** 2 **D** $1+\sqrt{3}$

c) $(\sin 45^\circ)^2 - 2\cdot\cos 45^\circ$ **A** $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ **B** $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ **C** $1-\sqrt{2}$ **D** $-\frac{1}{2}$



57. Pavaizduotas trikampis supjaustytas į 4 dalis (žr. 1 pav.). Iš tų dalių sudėtas kitas trikampis (žr. 2 pav.). Iš kur atsirado ta „skylutė“?

A Apatinė figūra (2 pav.), įskaitant ir skylutę, nėra trikampis
B Stebuklas



PASITIKRINAME

58. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\sin 30° + \cos 60°$; b) $\cos 30° + \sin 45°$;

c) $\operatorname{tg} 45° - \cos 45° + 2 \cdot \sin 60°$; d) $\left(\sin 60°\right)^2 - \left(\cos 30°\right)^2$;

e) $\left(\sin 25°\right)^2 + \left(\cos 25°\right)^2$; f) $\left(\cos 10°\right)^2 + \left(\sin 10°\right)^2$.

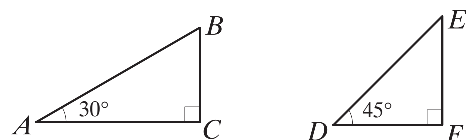
$2 \cdot \sin 30° - (\cos 45°)^2 =$

1) Pirmiausia apskaičiuojame $\sin 30°$ ir $\cos 45°$ reikšmes:

$\sin 30° = \frac{1}{2}$,

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pastaba. Kampų 30°, 45°, 60° sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes verta įsidėmėti! Jei $\sin 30°$ ir $\cos 45°$ reikšmių neatsimename, tai jas galima gauti iš stačiųjų trikampių:



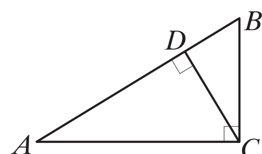
Tai mokėmės...

Taip pat tas reikšmes galima rasti iš sin, cos ir tg reikšmių lentelės arba skaičiuotuvu.

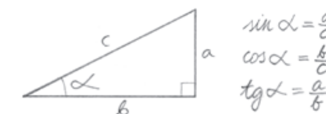
2) Vadinasi, $2 \cdot \sin 30° - (\cos 45°)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} =$
$= 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Atsakymas. $\frac{1}{2}$.

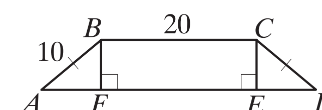
59. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) kampo A dydis lygus 10°, o įžambinė lygi 10 cm. Apskaičiuokite trikampio:
a) statinių ilgius; b) plotą; c) aukštinės, nubrėžtos į įžambinę, ilgį;
d) trikampio ABC visų trijų vidurio linijų ilgius.
Atsakymus parašykite dešimtųjų tikslumu.



$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot CD}{2}$.



60.

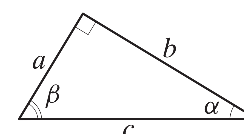


Duota: $ABCD$ — lygiašonė trapecija,
$AB = 10$ cm, $BC = 20$ cm,
$\angle A = 45°$.

Apskaičiuokite trapecijos:
a) aukštinės ilgį; b) ilgesniojo pagrindo ilgį;
c) plotą; d) vidurio linijos ilgį.

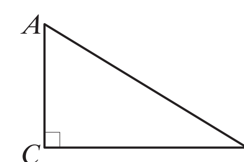
Trapecijos plotas lygus pagrindų ilgių sumos pusei, padaugintai iš aukštinės ilgio.
Trapecijos vidurio linija yra:
- lygiagreti su pagrindais;
- lygi pagrindų ilgių sumos pusei.

61. Kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių?



a) $\sin\alpha = \frac{\dots}{\dots}$; b) $\sin\beta = \frac{\dots}{\dots}$;
c) $\cos\alpha = \frac{\dots}{\dots}$; d) $\cos\beta = \frac{\dots}{\dots}$;
e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dots}{\dots}$; f) $\operatorname{tg}\beta = \frac{\dots}{\dots}$.

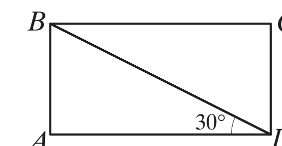
62. Apskaičiuokite trikampio ABC ($\angle C = 90°$) nežinomus kraštinių ilgius (dešimtųjų tikslumu) ir kampų dydžius (1° tikslumu), jei:



a) $AB = 2$ cm, $\angle A = 35°$;
b) $AC = 2$ cm, $\angle B = 20°$;
c) $AC = 2$ cm, $AB = 3$ cm;
d) $AC = 4$ cm, $CB = 1$ cm.

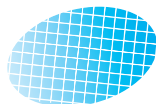
63. Saulės spinduliai su žemės paviršiumi sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite medžio, kurio aukštis yra 24 metrai, šešėlio ilgį (0,1 m tikslumu).

64. Pavaizduotas stačiakampis $ABCD$ ($AD > AB$), kurio perimetras lygus 40 cm, o įstrižainė BD su kraštine AD sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius (0,1 cm tikslumu).

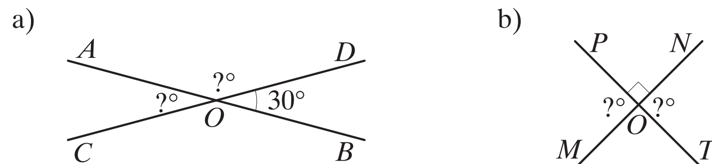


65. Gedimino pilies kalno aukštis nuo papėdės yra apie 48 m. Kalno šlaitai su horizontu sudaro apie 37° kampą. Kokį maždaug atstumą metrais reikia įveikti, einant tiesia linija, norint pasiekti Gedimino pilį trumpiausiu keliu?

66. Apskaičiuokite stačiojo trikampio perimetrą, jei jo įžambinės ilgis lygus 28 cm, o vienas iš smailiųjų kampų lygus 55°. Atsakymą užrašykite decimetro tikslumu.

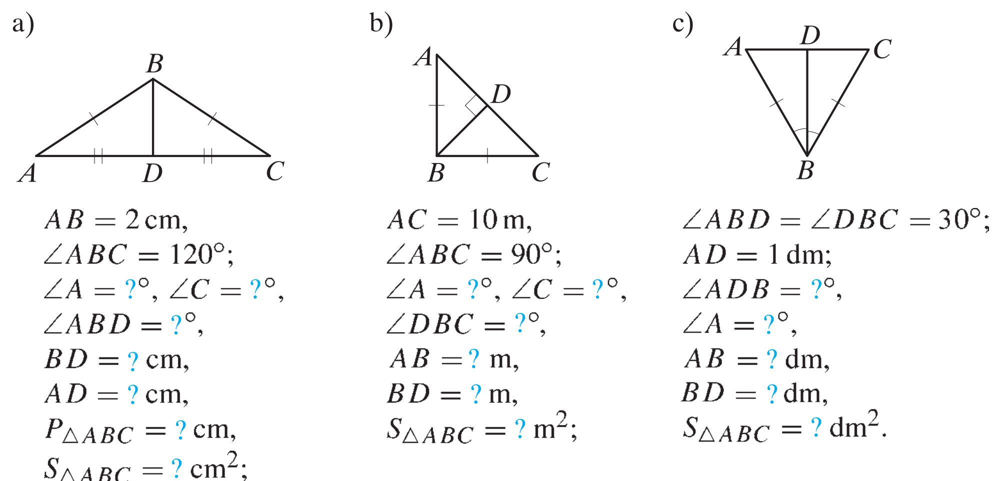


67. Pavaizduotos dvi tiesės, kurios susikerta taške O.



1) Apskaičiuokite klaustukais pažymėtų kampų dydžius.
2) Surašykite kryžminių kampų poras. Pasakykite kryžminių kampų savybę.
3) Surašykite gretutinių kampų poras. Pasakykite gretutinių kampų savybę.

68. Pavaizduotas lygiašonis trikampis ABC ($AB = BC$). Apskaičiuokite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų.



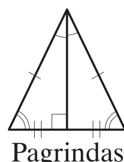
a) $AB = 2$ cm, $\angle ABC = 120°$; $\angle A = ?°$, $\angle C = ?°$, $\angle ABD = ?°$, $BD = ?$ cm, $AD = ?$ cm, $P_{\triangle ABC} = ?$ cm, $S_{\triangle ABC} = ?$ cm^2;

b) $AC = 10$ m, $\angle ABC = 90°$; $\angle A = ?°$, $\angle C = ?°$, $\angle DBC = ?°$, $AB = ?$ m, $BD = ?$ m, $S_{\triangle ABC} = ?$ m^2;

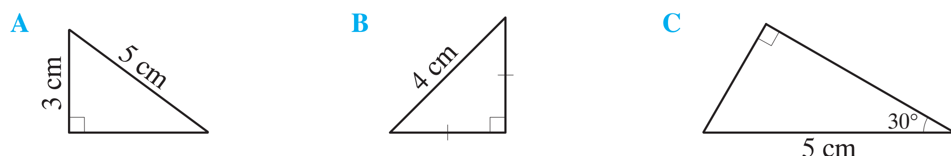
c) $\angle ABD = \angle DBC = 30°$; $AD = 1$ dm; $\angle ADB = ?°$, $\angle A = ?°$, $AB = ?$ dm, $BD = ?$ dm, $S_{\triangle ABC} = ?$ dm^2.

Trikampis, kurio dvi kraštinės yra lygios, vadinamas ***lygiašoniù trikampiù***.

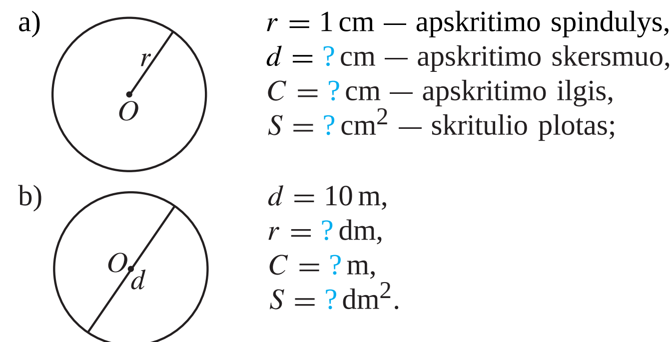
- Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs.
- Lygiašonio trikampio aukštinė, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, nubrėžtos į pagrindą, sutampa.


Pagrindas

69. Kurio iš pavaizduotų trikampių plotas yra didžiausias? mažiausias?



70. Paveikslėlyje pavaizduotas apskritimas (skritulys). Apskaičiuokite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų.



a) $r = 1$ cm — apskritimo spindulys, $d = ?$ cm — apskritimo skersmuo, $C = ?$ cm — apskritimo ilgis, $S = ?$ cm^2 — skritulio plotas;

b) $d = 10$ m, $r = ?$ dm, $C = ?$ m, $S = ?$ dm^2.

Apskritimo ilgis skaičiuojamas remiantis formule $C = 2\pi r = \pi d$.
Skritulio plotas skaičiuojamas remiantis formule $S = \pi r^2$.
π — begalinė dešimtainė neperiodinė trupmena, $\pi = 3{,}1415\ldots$.



71. Kokį maždaug sveikąjį skaičių kartų apskritimo ilgis yra didesnis už jo:
a) spindulio ilgį?
b) skersmens ilgį?

72. Apskaičiuokite apskritimo (skritulio) spindulio ilgį, jei jo:
a) ilgis lygus 3π cm;
b) plotas lygus 9π m^2;
c) ilgis lygus π m;
d) plotas lygus π cm^2;
e) ilgis lygus $\sqrt{3}\pi$ dm;
f) plotas lygus 5π dm^2.

73. 1) Nubraižykite skritulinę diagramą, kuri rodytų, kurią jūsų klasės mokinių dalį sudaro berniukai ir kurią — mergaitės.
2) Klasės mokinių dalį, kurią sudaro berniukai, užrašykite paprastąja trupmena, o likusiąją, kurią sudaro mergaitės, nurodykite procentais.
3) Apskaičiuokite, keliais procentais berniukų yra daugiau (mažiau) negu mergaičių.
4) Apskaičiuokite, keliais procentais mergaičių yra daugiau (mažiau) negu berniukų.

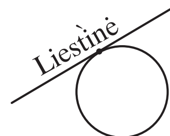
74. Skritulio spindulys lygus 12 cm. Keliais procentais padidės (sumažės) skritulio ilgis ir plotas, kai jo spindulys:
a) sumažės 10 procentų?
b) padidės 25 procentais?
c) padidės dvigubai?
d) sumažės trigubai?

Apskritimas, kuris liečia kampo kraštines

Užduotis.

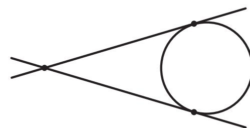
1) Nubraižykite apskritimą, kurio spindulys lygus 2 cm. Apskritimo centrą pažymėkite raide O.
2) Pažymėkite kokį nors tašką A, nuo apskritimo centro O nutolusį 4 cm atstumu.
3) Per tašką A nubrėžkite tiesę, kuri su apskritimu turėtų vienintelį bendrą tašką. Tą tašką pažymėkite raide B.

Tiesė, kuri su apskritimu turi vienintelį bendrą tašką, vadinama ***apskritìmo liestinė̀***.



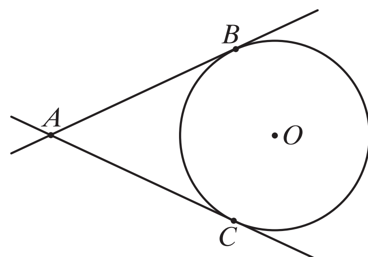
4) Per tašką A nubrėžkite kitą tiesę, su tuo apskritimu turinčią vienintelį bendrą tašką. Tą tašką pažymėkite raide C.

Per tašką, esantį šalia apskritimo, galima nubrėžti ***dvi*** liestines.



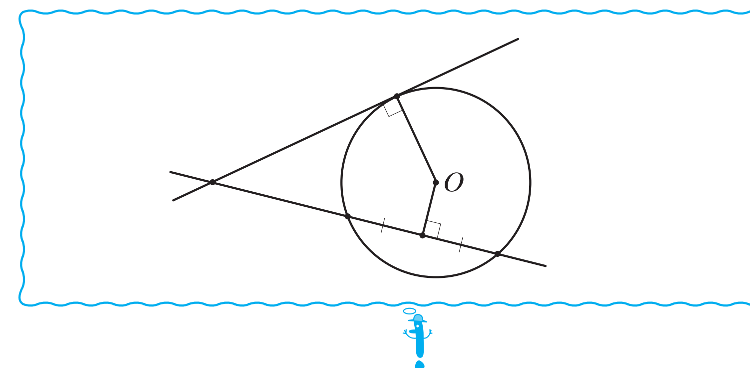
5) Matuodami nustatykite atkarpų AB ir AC ilgius.

Tačiau matuojant tikslaus atkarpos ilgio nustatyti dažniausiai neįmanoma. Gal galima tų atkarpų ilgius apskaičiuoti?



Duota: $OB = 2$ cm, $OA = 4$ cm.
Apskaičiuoti: $AB = ?$ cm, $AC = ?$ cm.

To išmoksime šiame skyriuje.



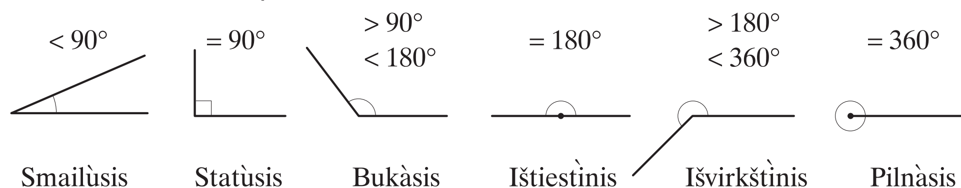
- Sužinosime, ką vadiname skritulio ìšpjova ir núopjova.
- Mokysimės skaičiuoti skritulio išpjovos ir nuopjovos plótus bei lankų ilgiùs.
- Sužinosime, ką vadiname apskritimo liestinė̀ ir kirstinė̀.
- Sužinosime apskritimo liestinių ir kirstinių savybes.

7.1. CENTRINIS KAMPAS. IŠPJOVA

Užduotis.

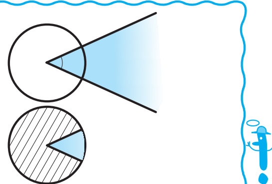
1) Nubraižykite kokį nors skritulį. Jo centrą pažymėkite raide O.
2) Nubraižykite kokį nors smailųjį kampą, kurio viršūnė būtų to skritulio centre O.

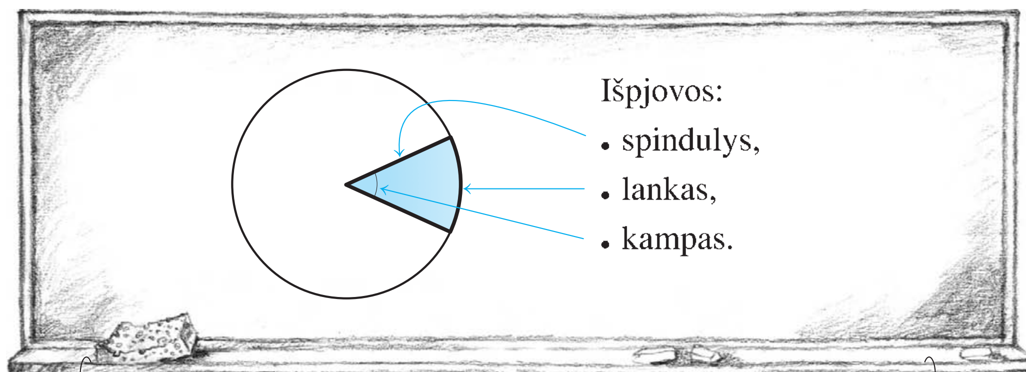
Prisiminkime kampų rūšis:



Kampų dydžiai matuojami laipsniais.
Ištiestinio kampo dydį sutarta laikyti lygiu 180°.

Kampas, kurio viršūnė yra skritulio centre, vadinamas ***centrinìu kampù***.
Centrinis kampas skritulį padalija į dvi dalis.
Tos dalys vadinamos ***ìšpjovomis***.





Centrinis kampas, kurio dydis lygus $\alpha°$, padalija skritulį į dvi išpjovas.
Vienos išpjovos kampas lygus $\alpha°$, o kitos išpjovos kampas lygus $360° - \alpha°$.

3) Matuodami nustatykite gautų išpjovų kampų dydžius.

75. Kokiu kampu pasisuka *minutes* rodanti laikrodžio rodyklė per:

a) 30 min? b) 15 min? c) 45 min? d) 1 h?
e) 5 min? f) 1 min? g) 17 min? h) 0,9 h?

76. Kokiu kampu pasisuka *valandas* rodanti laikrodžio rodyklė per:

a) 60 min? b) 30 min? c) 4 h? d) 12 h?
e) 2 min? f) 1 h 30 min? g) $\frac{1}{3}$ h? h) 0,6 h?

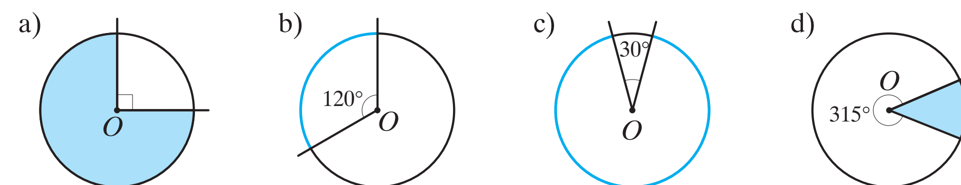
77. Kokio dydžio smailųjį kampą sudaro valandas ir minutes rodančios laikrodžio rodyklės, kai laikrodis rodo:

a) 15 val.? b) 1 val.? c) 12 val. 20 min.? d) 18 val. 42 min.?

78. Per kiek minučių laikrodžio:

a) minutinė rodyklė pasisuka 180° kampu? 6° kampu?
b) valandinė rodyklė pasisuka 180° kampu? 6° kampu? 1° kampu?

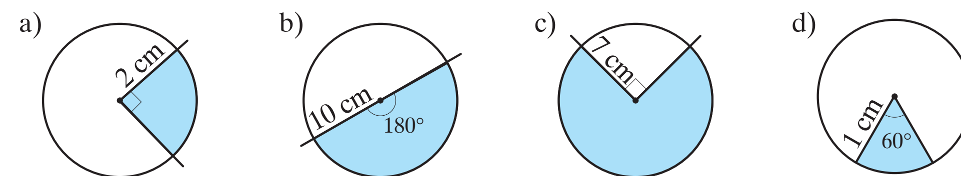
79. Taškas O — paveikslėlyje pavaizduoto apskritimo (skritulio) centras.



1) Kuri skritulio dalis nuspalvinta paveikslėlyje a)? d)?
2) Kuri apskritimo dalis nuspalvinta paveikslėlyje b)? c)?

Atsakymą parašykite paprastąja trupmena; dešimtaine trupmena; procentais.

80. Apskaičiuokite nuspalvintos išpjovos lanko ilgį ir plotą.



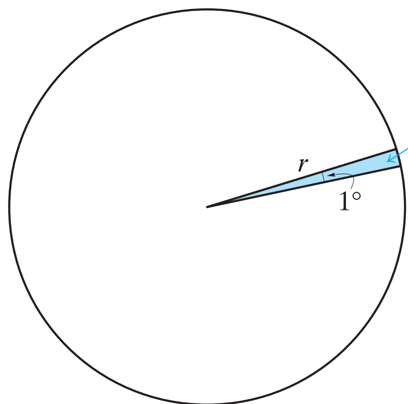
Skritulio (apskritimo) ilgis $C = 2\pi r$.
Skritulio (apskritimo) plotas $S = \pi r^2$.

81. a) Apskaičiuokite išpjovos spindulio ilgį, jei jos lanko ilgis lygus 4π cm, o kampo dydis lygus 180°; 90°; 60°.

b) Apskaičiuokite išpjovos spindulio ilgį, jei jos plotas lygus 2π mm^2, o kampo dydis lygus 180°; 90°; 60°.

7.2. IŠPJOVOS LANKO ILGIS IR PLOTAS

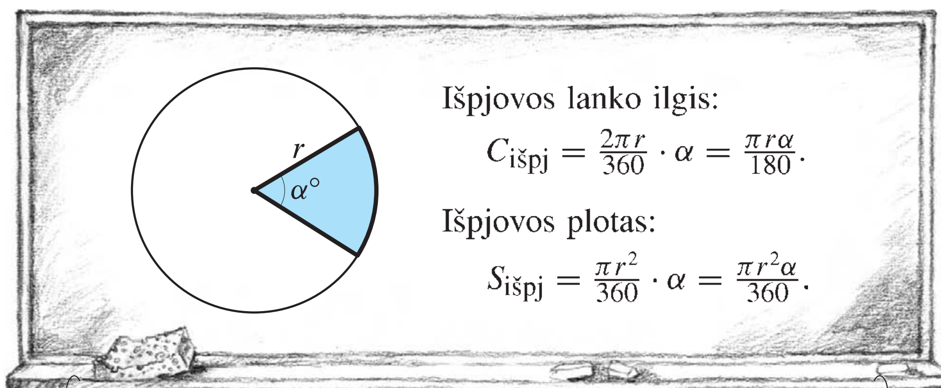
Pavaizduotas skritulys, kurio spindulys yra r cm, ir išpjova, kurios kampas lygus 1°.



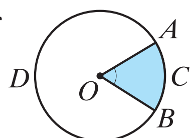
Šios išpjovos lanko ilgis ir plotas yra 360 kartų mažesni už skritulio ilgį ir plotą.

Užduotis.

1) Užrašykite, kam lygus skritulio ilgis C ir plotas S.
2) Užrašykite, kam lygus išpjovos lanko ilgis $C_{\text{išpj}}$ ir plotas $S_{\text{išpj}}$.
3) a) Apskaičiuokite C ir $C_{\text{išpj}}$ reikšmes, kai $r = 6$ cm.
   b) Apskaičiuokite S ir $S_{\text{išpj}}$ reikšmes, kai $r = 6$ cm.
   Parašykite tikslų atsakymą (su raide π) ir apytikslį atsakymą (vietoj π imdami 3).
4) Apskaičiuokite skritulio, kurio $r = 1$ cm, išpjovos lanko ilgį ir plotą, kai tos išpjovos kampo dydis lygus:
   a) 10°; b) 70°. (Atsakymą parašykite su raide π.)



Skritulio išpjovą dažnai būna patogu nurodyti keturiomis, o lanką — trimis raidėmis.

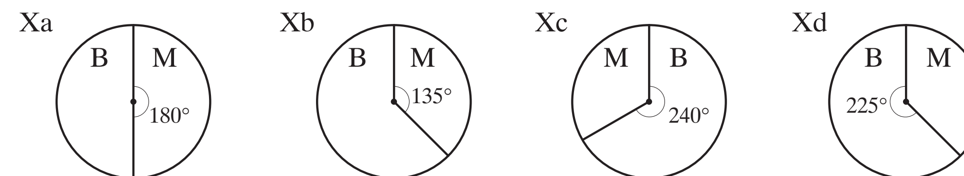


Išpjovos: $OACB$ ir $OADB$.
Išpjovų lankai: $\smile ACB$ ir $\smile ADB$.

82. Apskaičiuokite skritulio išpjovos lanko ilgį $C_{\text{išpj}}$ ir plotą $S_{\text{išpj}}$, jei skritulio spindulys yra r, skersmuo — d, o išpjovos kampas — α, kai:

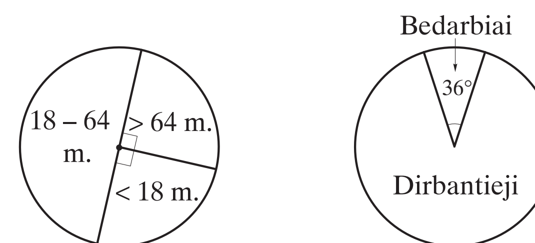
a) $r = 1$ cm, $\alpha = 1°$; b) $r = 1$ cm, $\alpha = 25°$;
c) $r = 2$ mm, $\alpha = 190°$; d) $r = 15$ mm, $\alpha = 255°$;
e) $d = 4$ dm, $\alpha = 13°$; f) $d = 0{,}5$ dm, $\alpha = 137°$.

83. Skritulinėse diagramose pavaizduota, kurią vienos mokyklos kiekvienos dešimtos klasės mokinių dalį sudaro mergaitės (M) ir kurią — berniukai (B):



1) Kiek mokinių mokosi Xa klasėje, jei joje yra 15 mergaičių?
2) Kiek berniukų mokosi Xb klasėje, jei joje yra 24 mokiniai?
3) Kiek mergaičių mokosi Xc klasėje, jei joje yra 30 mokinių?
4) Kiek berniukų mokosi Xd klasėje, jei joje yra 4 mergaitėmis mažiau negu berniukų?
5) Kiek visose keturiose klasėse mokosi:
   a) mokinių? b) mergaičių? c) berniukų?
6) Visų klasių bendrą mergaičių ir berniukų pasiskirstymą pavaizduokite skrituline diagrama. Kokio dydžio (laipsniais) išpjovą toje diagramoje atitinka mergaitės?

84. Karalystėje gyvena 10 000 žmonių. Vienoje diagramoje pavaizduota, kurią tos karalystės gyventojų dalį sudaro jaunesni kaip 18 metų, kurią — vyresni kaip 64 metai ir kurią — 18–64 metų amžiaus žmonės. Kitoje diagramoje pavaizduota, kuri karalystės 18–64 metų amžiaus gyventojų dalis neturi darbo.



Remdamiesi diagramų duomenimis, apskaičiuokite:

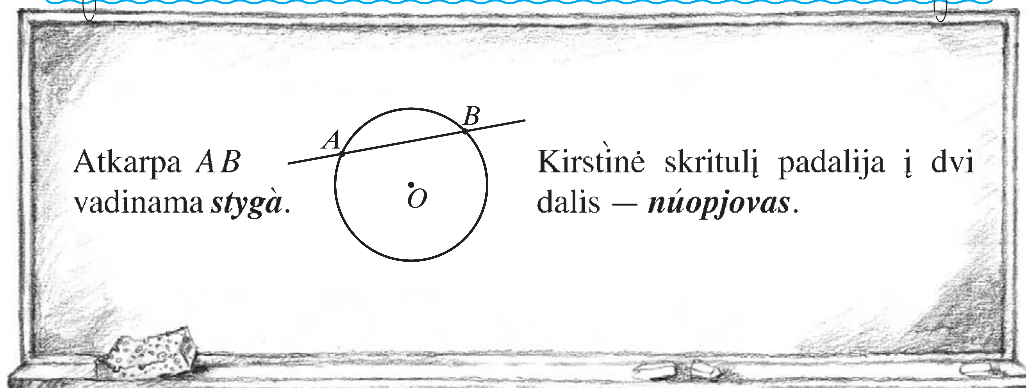
a) kurią dalį gyventojų sudaro vaikai (atsakymą parašykite paprastąja trupmena ir procentais);
b) kiek bedarbių yra toje karalystėje.

7.3. APSKRITIMO KIRSTINĖ. NUOPJOVA

Užduotis.

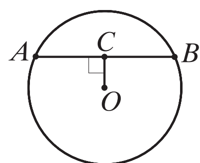
1) Nubraižykite apskritimą (skritulį) su centru O. Nubrėžkite tiesę, kuri kirstų tą apskritimą taškuose A ir B ir neitų per centrą O.

Tiesẽ, su apskritimu (skrituliu) turinti du bendrus taškus, vadinama jo ***kirstìnė***.



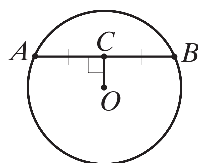
2) Nubrėžkite apskritimo spindulį, statmeną kirstinei.
Spindulio ir tiesės AB susikirtimo tašką pažymėkite C.
Įsitikinkite (nematuodami), kad $AC = CB$, t. y. įrodykite teiginį:
Apskritimo spindulys, kuris yra statmenas stygai, tą stygą padalija pusiau.

Jei $OC \perp AB$,



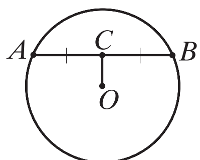


tai $AC = CB$



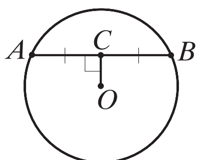
3) O dabar įrodykite tokį teiginį:
Apskritimo spindulys, einantis per apskritimo stygos vidurio tašką, yra statmenas tai stygai.

Jei $AC = CB$,





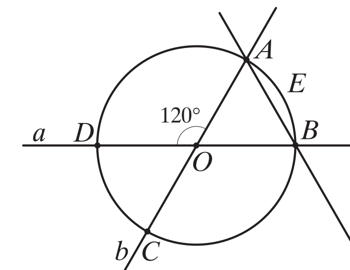
tai $OC \perp AB$



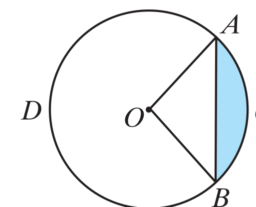
Nubrėžkite spindulius OA ir OB ir nagrinėkite trikampius OAB, OAC ir OBC.

85. Paveikslėlyje pavaizduotas apskritimas, kurio spindulys $OA = 1$ cm. Nubrėžtos trys jo kirstinės a, b ir c. Kampo AOD dydis lygus 120°.

Apskaičiuokite:
1) kampų AOB, OAB, OBA dydžius;
2) stygų CA, DB, AB ilgius;
3) išpjovų AOB, AOD lankų ilgius ir plotus;
4) trikampio AOB perimetrą ir plotą;
5) nuopjovos BAE plotą.



Nuopjovos plotą gauname iš (prie) tą nuopjovą atitinkančios išpjovos ploto atėmę (pridėję) išpjovos trikampės dalies plotą:

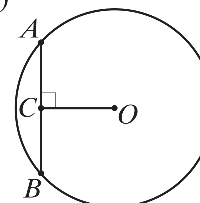


$$S_{ABC} = S_{OACB} - S_{\triangle OAB};$$

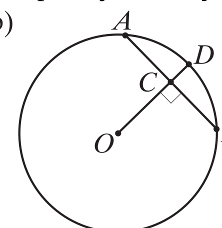
$$S_{ABD} = S_{OADB} + S_{\triangle OAB}.$$

86. Apskaičiuokite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų.

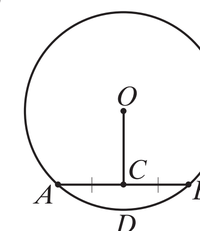
a)



b)

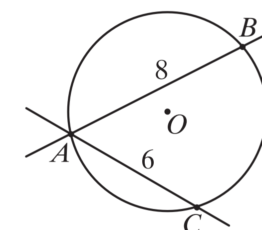


c)



a)	b)	c)
$AB = 6$ cm,	$AC = 4$ cm,	$AC = 10$ mm,
$OC = 2$ cm,	$OD = 5$ cm,	$AO = 10\sqrt{2}$ mm,
$CB = ?$ cm,	$OB = ?$ cm,	$OC = ?$ mm,
$AC = ?$ cm,	$CD = ?$ cm;	$S_{\triangle AOB} = ?$ mm^2,
$AO = ?$ cm;		$S_{\text{išpj } AOB} = ?$ mm^2,
		$S_{\text{nuopj } ABD} = ?$ mm^2.

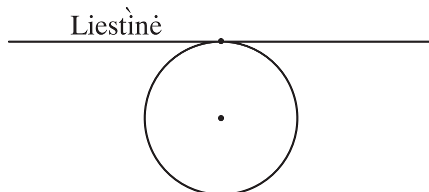
87. Pavaizduotas apskritimas su centru O ir dvi jo kirstinės AB ir AC. Atkarpa $AB = 8$, $AC = 6$. Atstumas nuo O iki AB yra lygus 3. Apskaičiuokite:
1) apskritimo spindulio ilgį;
2) atstumą nuo O iki AC;
3) kampų BAO, CAO ir CAB dydžius (1° tikslumu).



7.4. APSKRITIMO LIESTINĖ

Užduotis.

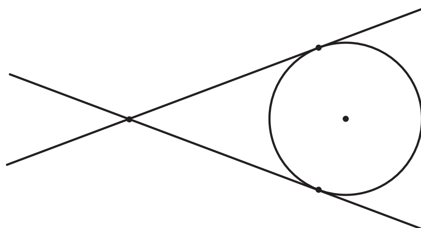
1) Nubraižykite apskritimą su centru O. Šalia apskritimo (jo išorėje) pažymėkite tašką A ir per tą tašką nubrėžkite tiesę, turinčią su apskritimu vienintelį bendrą tašką B.



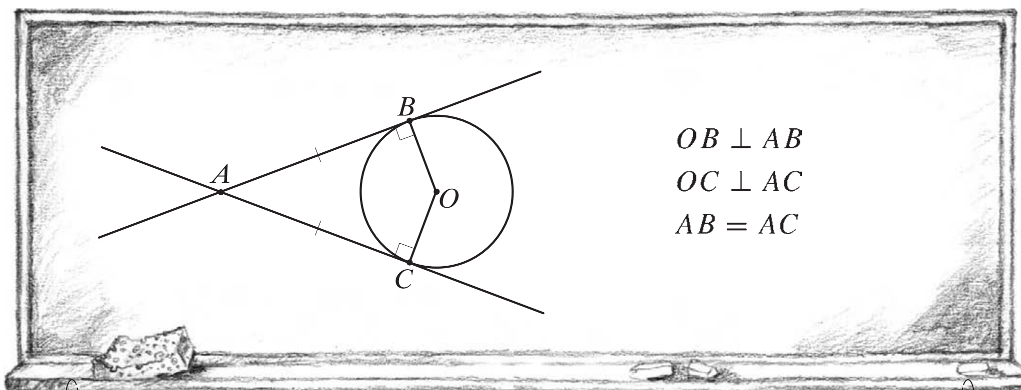
Tiesė, su apskritimu (skrituliu) turinti vienintelį bendrą tašką, vadinama jo ***liestinė***.

2) Nubrėžkite apskritimo spindulį OB. Įsitikinkite, kad $OB \perp AB$.
3) Per tašką A nubrėžkite kitą to apskritimo liestinę. Bendrą tos liestinės ir apskritimo tašką pažymėkite raide C.

Per tašką, esantį šalia apskritimo, galima nubrėžti dvi liestines.

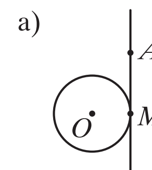


4) Įsitikinkite, kad $AB = AC$.

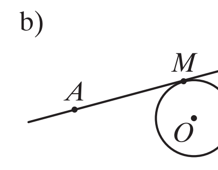


- Susikertančių liestinių atkarpos yra lygios.
- Apskritimo spindulys, nubrėžtas į lietimosi tašką, yra statmenas liestinei.

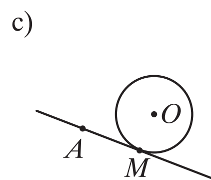
88. Per tašką A nubrėžta apskritimo su centru O liestinė. Liestinės ir apskritimo bendras taškas pažymėtas raide M. Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, apskaičiuokite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustuko.

a)


$AM = 6$ cm,
$OM = 4{,}5$ cm,
$AO = ?$ cm;

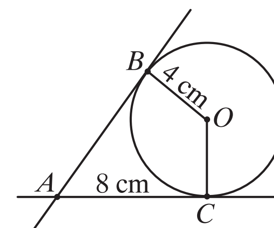
b)


$AO = 10$ cm,
$MO = 2$ cm,
$AM = ?$ cm;

c)


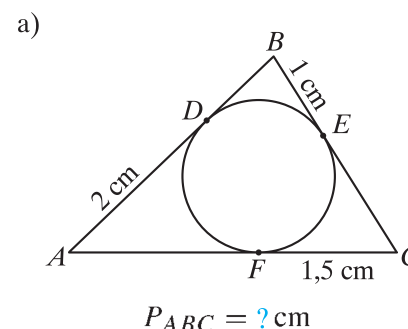
$AM = 15$ mm,
$AO = 20$ mm,
$OM = ?$ mm.

89. Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, apskaičiuokite:

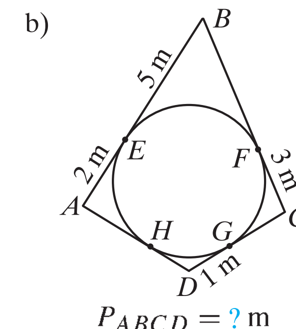


1) AB ilgį;
2) AO ilgį;
3) P_{ABOC};
4) $\angle BAO$ dydį (1° tikslumu);
5) $\angle BAC$ dydį (1° tikslumu).

90. Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, apskaičiuokite daugiakampio perimetrą.

a)


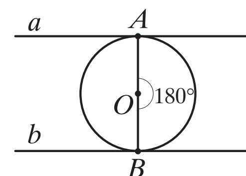
$P_{ABC} = ?$ cm

b)


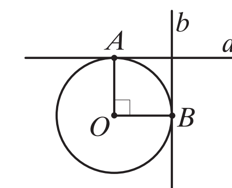
$P_{ABCD} = ?$ m

91. Įrodykite, kad liestinės a ir b:

a) yra lygiagrečios ($a \parallel b$);



b) yra statmenos ($a \perp b$).



APIBENDRINAME

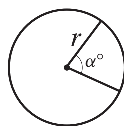
Skritulio išpjova

Kampas, kurio viršūnė yra apskrìtimo (skrìtulio) centrè, vadinamas ***centriniù kampù***. Centrinis kampas skritulį padalija į dvi dalis, kurios vadinamos ***skrìtulio ìšpjovomis***.

$\angle AOB$ — išpjovos kampas,
$\smile AB$ — išpjovos lankas,
$OA = OB$ — išpjovos spindulys.

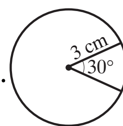
Išpjovos, kurios spindulys yra r, o kampas lygus $\alpha°$:

- lanko ilgis $C_{\text{išpj}} = \frac{\pi r \alpha}{180}$;
- plotas $S_{\text{išpj}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$.



$C_{\text{išpj}} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 30}{180} = \frac{\pi}{2}$ (cm)

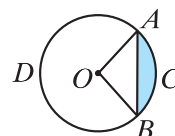
$S_{\text{išpj}} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 30}{360} = \frac{3}{4}\pi$ (cm^2).



Skritulio nuopjova

Skritulio styga jį padalija į dvi dalis, kurios vadinamos ***skrìtulio núopjovomis***.

Nuopjovos plotą galima apskaičiuoti, iš (prie) ją atitinkančios išpjovos ploto atėmus (pridėjus) išpjovos trikampio plotą.



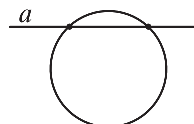
$S_{ABC} = S_{OACB} - S_{\triangle AOB}$,
$S_{ADB} = S_{OADB} + S_{\triangle AOB}$,
$\triangle AOB$ — lygiašonis.

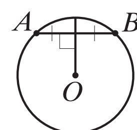
Apskritimo kirstinė

Tiesė, su apskritimu turinti du bendrus taškus, vadinama *apskrìtimo kirstinė*.

Spindulys, statmenas stygai, padalija ją į dvi lygias atkarpas.

Spindulys, einantis per stygos vidurio tašką, yra statmenas stygai.



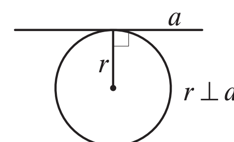


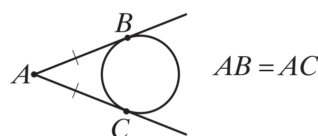
Apskritimo liestinė

Tiesė, su apskritimu turinti vienintelį bendrą tašką, vadinama *apskrìtimo liestinė*.

Apskritimo spindulys, nubrėžtas į lietimosi tašką, yra statmenas liestinei.

Per šalia apskritimo esantį tašką galima nubrėžti dvi liestines. Tų liestinių atkarpos yra lygios.



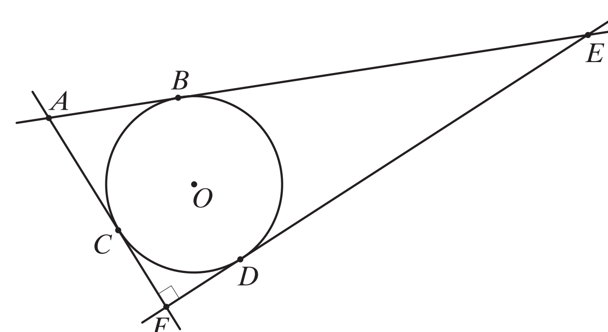


Apskritimas, kuris liečia trikampio kraštines

Prisiminkime šio skyriaus įvadinę užduotį (žr. p. 34).

Užduotis.

1) Nubraižykite 2 cm spindulio apskritimą su centru O.
2) Per tašką A, kuris nuo O nutolęs 4 cm atstumu ($AO = 4$ cm), nubrėžkite dvi apskritimo liestines AB ir AC (B ir C — lietimosi taškai).
3) Naudodamiesi kampainiu, nubrėžkite trečią to apskritimo liestinę EF tokią, kad ji būtų statmena tiesei AC. Apskritimo ir EF bendrą tašką pažymėkite raide D.



Duota:
$OB = 2$ cm,
$AO = 4$ cm,
$\angle AFE = 90°$.

Apskaičiuoti:
$AF + FE + EA = ?$ cm.

4) Apskaičiuokite trikampio AEF perimetrą.

1) Iš $\triangle AOB$ apskaičiuokite AB ilgį.
2) Iš keturkampio $FCOD$ apskaičiuokite FC ilgį.
3) Apskaičiuokite $\angle EAF$ ir $\angle AEF$ dydžius.
....



Tai įdomu, bet žinoti nebūtina...

Apskritimas, kuris liečia visas daugiakampio kraštines, vadinamas *įbrėžtiniù apskritimù*.

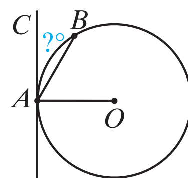
Į bet kokį trikampį galima įbrėžti apskritimą.
Į iškiląjį keturkampį, kurio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios, galima įbrėžti apskritimą.

Apskritimas, kuris eina per visas daugiakampio viršūnes, vadinamas *apibrėžtiniù apskritimù*.

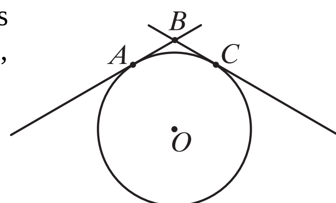
Apie bet kokį trikampį galima apibrėžti apskritimą.
Apie keturkampį, kurio priešingų kampų sumos yra lygios (=180°), galima apibrėžti apskritimą.

SPRENDŽIAME

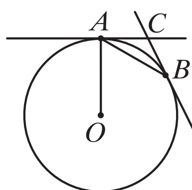
92. Per apskritimo tašką A nubrėžta liestinė AC ir styga AB, kuri yra lygi apskritimo spinduliui. Apskaičiuokite kampo CAB dydį.



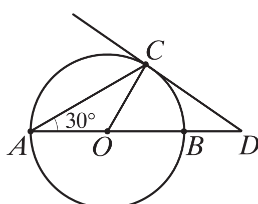
93. Tiesės BA ir BC liečia apskritimą, kurio centras yra O, taškuose A ir C. Apskaičiuokite AC ilgį, kai $\angle ABC = 120°$ ir $AB = 5$ cm.



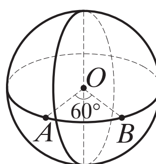
94. Apskritimo styga AB lygi spinduliui. Per stygos galus nubrėžtos dvi liestinės, susikertančios taške C. Apskaičiuokite kampo ACB dydį.



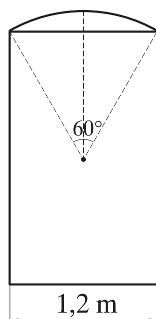
95. Kampas tarp apskritimo skersmens AB ir stygos AC lygus 30°. Per tašką C nubrėžta liestinė, kertanti tiesę AB taške D.
1) Apskaičiuokite $\angle ACO$ dydį.
2) Apskaičiuokite $\angle ACD$ dydį.
3) Įrodykite, kad $\triangle ACD$ yra lygiašonis.



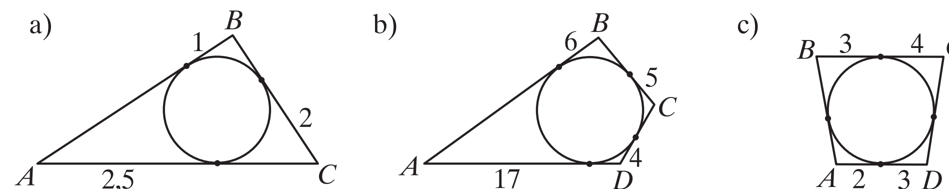
96. Apskaičiuokite atstumą tarp miestų A ir B, esančių pusiaujyje, jei $\angle AOB = 60°$. Tarkime, kad taškas O — Žemės rutulio centras, Žemės spindulys lygus 6000 km, $\pi = 3{,}14$.



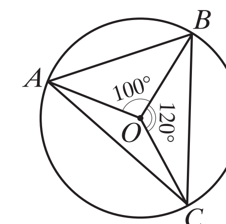
97. Lango forma yra stačiakampis, užbaigtas lanku apskritimo, kurio centras yra stačiakampio įstrižainių susikirtimo taške. Remdamiesi nurodytais duomenimis, apskaičiuokite lango plotą.



98. Apskaičiuokite apie apskritimą apibrėžto daugiakampio perimetrą.



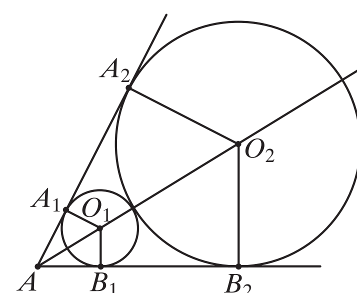
99. Ant apskritimo, kurio centras yra taškas O, pažymėti taškai A, B ir C taip, kad $\angle AOB = 100°$, $\angle BOC = 120°$. Apskaičiuokite trikampio ABC kampų dydžius.



100. Apskritimas taškais A, B ir C padalytas į lankus AB, BC ir CA, kurių ilgių santykiai yra 6 : 2 : 10. Taškai A, B ir C sujungti atkarpomis. Apskaičiuokite trikampio ABC kampų dydžius.

101. Du vandentiekio vamzdžius, kurių skersmenys yra 6 cm ir 8 cm, reikia pakeisti vienu tokiu vamzdžiu, kad vandens pralaidumas nepasikeistų. Koks turi būti naujojo vamzdžio skersmuo?

102.



Duota:
$AO_1 = 6$ cm, $O_1A_1 = 3$ cm.
Apskaičiuoti:
$AO_2 = ?$ cm,
$\angle A_1AB_1 = ?°$.



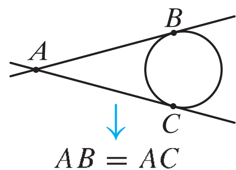
103. ***Nustatykite „skilią" šaką.***
Beždžionė yra palmėje, kuri turi 11 šakų, esančių skirtinguose aukščiuose nuo žemės. Beždžionė nori nustatyti arčiausiai žemės esančią šaką, iš kurios mestas kokoso riešutas, nukritęs ant žemės, suskils. Beždžionė turi 2 riešutus ir 4 bandymus.



Apskritimo tiesių ir kampų savybės

Žinome dviejų susikertančių apskritimo *liestinių* savybę (žr. 1 pav.).

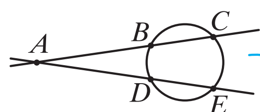
1 pav.



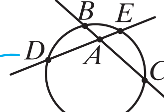
$AB = AC$

Dvi susikertančios kirstinės taip pat turi svarbią savybę (žr. 2 ir 3 pav.). Kirstinės, pavaizduotos 2 pav., kertasi už apskritimo, o 3 pav. — kertasi apskritimo viduje.

2 pav.



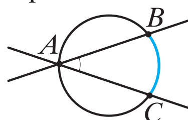
3 pav.



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Galima kalbėti ir apie dvi kirstines, kurios kertasi ant apskritimo (žr. 4 pav.).

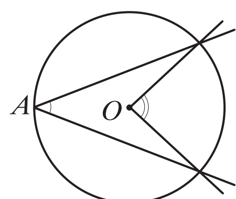
4 pav.



Šiuo atveju įdomiau nagrinėti ne kirstines, o kampą, kurio viršūnė yra ant apskritimo, o kraštinės kerta tą apskritimą. Toks kampas vadinamas ***įbrėžtiniu kampù***.

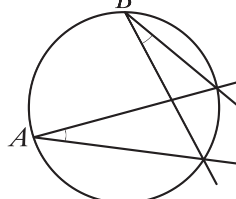
Sakoma, kad įbrėžtinis kampas BAC remiasi į lanką BC. Nesunku įsitikinti, kad įbrėžtinio kampo dydis lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo dydžio (žr. 5 pav.).

5 pav.



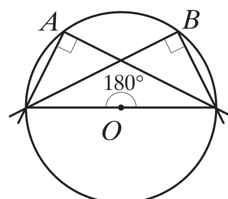
$\angle A = \frac{\angle O}{2}$

6 pav.



$\angle A = \angle B$

7 pav.



$\angle A = \angle B = \frac{180°}{2} = 90°$

Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką, yra lygūs (žr. 6 pav.).
Įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į apskritimo skersmenį, yra status (žr. 7 pav.).

Užduotis. Įrodykime lygybes, pateiktas 1–3, 5–7 pav.

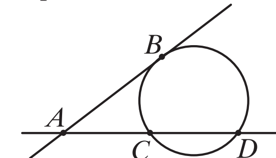
1) Įrodykite 1 pav. lygybę.
2) Remdamiesi 5 pav. lygybe, įrodykite 6 ir 7 pav. lygybes. (Beje, galite pabandyti įrodyti ir 5 pav. lygybę).
3) Įrodykite 2 pav. lygybę.

1) Nagrinėkite trikampius ACD ir AEB.
2) Remdamiesi 6 pav. lygybe, įsitikinkite, kad tie trikampiai yra panašūs.
3) Užrašykite dviejų tų trikampių kraštinių porų santykių lygybę (proporciją).
. . . . . .



4) Pabandykite įrodyti 3 pav. lygybę.
5) Pabandykite įrodyti susikertančių liestinės ir kirstinės savybę (žr. 8 pav.).

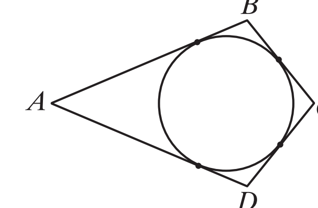
8 pav.



$AB^2 = AC \cdot AD$

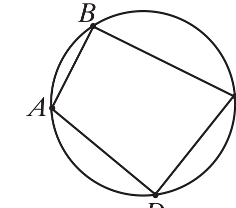
6) Remdamiesi 1 pav. lygybe, įsitikinkite, kad apie apskritimą apibrėžto keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios (žr. 9 pav.).

9 pav.



$AB + CD = BC + AD$

10 pav.



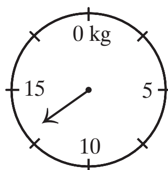
$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

7) Remdamiesi 6 pav. lygybe, įrodykite, kad į apskritimą įbrėžto keturkampio priešingų kampų dydžių sumos yra lygios 180° (žr. 10 pav.).

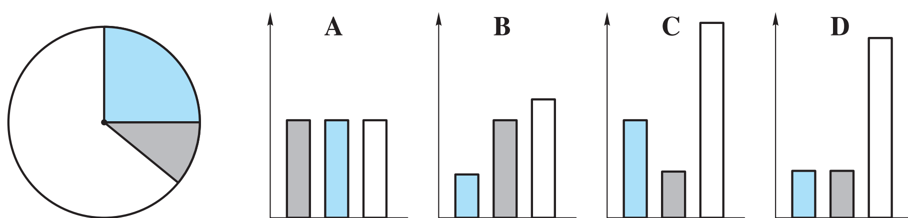
TESTAS

104. Kokiu kampu nuo pradinės padėties (0 kg) pasisukusi svarstyklių rodyklė?

A 132° **B** 228° **C** 272° **D** 188°



105. Kuri stulpelinė diagrama sudaryta remiantis skritulinėje diagramoje pateiktais duomenimis?



106. Apskritimo spindulys lygus 5 cm. Koks yra apskritimo lanko, atitinkančio 220° centrinį kampą, ilgis?

A $\frac{275\pi}{9}$ cm **B** $\frac{110\pi}{9}$ cm **C** $\frac{275}{9\pi}$ cm **D** $\frac{55\pi}{9}$ cm

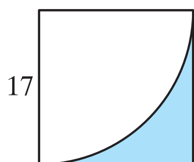
107. Iš skritulio, kurio spindulys lygus 10 cm, išimta išpjova, kurios centrinis kampas lygus 30°. Koks likusios išpjovos plotas?

A $\frac{25\pi}{3}$ cm^2 **B** 100π cm^2 **C** $\frac{275}{3}\pi$ cm^2 **D** $\frac{55\pi}{3}$ cm^2

108. Išpjovos, kurios centrinis kampas lygus 36°, plotas lygus 12π cm^2. Koks yra išpjovos spindulio ilgis?

A 60 cm **B** $2\sqrt{30}$ cm **C** 120π cm **D** $\sqrt{12\pi}$ cm

109. Pavaizduotas kvadratas, kuriame nubrėžtas lankas apskritimo, kurio spindulys lygus kvadrato kraštinei. Koks yra nuspalvintos kvadrato dalies plotas (vienetų tikslumu; vietoj π imkite 3)?



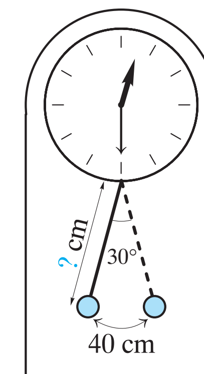
A 289 **B** 217 **C** 72 **D** 70

110. Kiek pailgėtų Žemės pusiaujas, jei Žemės rutulio spindulys padidėtų 12 cm?

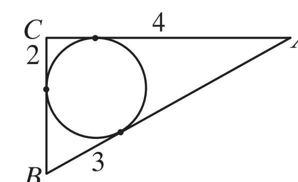
A 6,28 km **B** 2π km **C** 24π cm **D** Nustatyti neįmanoma

111. Senovinio sieninio laikrodžio švytuoklės švytavimo kampas lygus 30°. Lanko, kurį nubrėžia švytuoklės galas, ilgis yra 40 cm. Koks yra švytuoklės ilgis centimetrais (dešimtųjų dalių tikslumu)?

A 76,43 cm **B** 76,5 cm **C** 76,4 cm **D** 76,44 cm



112. Trikampio ABC perimetras lygus:



A 9 **B** 9π **C** 18 **D** 16

113. Pavaizduoto apskritimo spindulys lygus 8 cm, α — centrinis kampas.

1) Jei $\alpha = 60°$, tai $AB =$

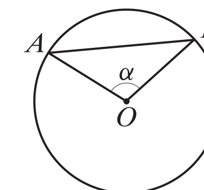
A $\sqrt{48}$ cm **B** 8 cm **C** $4\sqrt{3}$ cm **D** 8 cm

2) Jei $\alpha = 90°$, tai $AB =$

A 8 cm **B** $8\sqrt{2}$ cm **C** $2\sqrt{8}$ cm **D** $\sqrt{48}$ cm

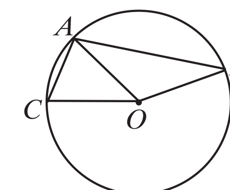
3) Jei $\alpha = 180°$, tai $AB =$

A 8 cm **B** 16π cm **C** 16 cm **D** $8\sqrt{2}$ cm



114. Žinoma, kad $\angle AOB = 116°$, $\angle AOC = 44°$. Kampo BAC dydis lygus:

A 68° **B** 37° **C** 105° **D** 100°



115. 1) Išpjovos, atitinkančios 60° centrinį kampą, plotas lygus:

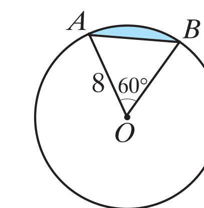
A 64π **B** $\frac{8\pi}{3}$ **C** $\frac{32\pi}{3}$ **D** $\frac{160\pi}{3}$

2) Trikampio AOB plotas lygus:

A 32 **B** $16\sqrt{3}$ **C** $\frac{32\pi}{3}$ **D** 24

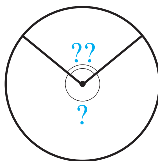
3) Nuspalvintos nuopjovos plotas lygus:

A $16\sqrt{3} - \frac{32\pi}{3}$ **B** $\frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3}$ **C** $\frac{32\pi}{3} + 16\sqrt{3}$ **D** $\frac{32\pi}{3}$



PASITIKRINAME

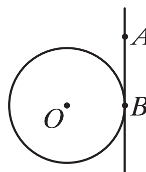
116. Apskaičiuokite dviejų to paties skritulio išpjovų kampų dydžius, jei:
a) vienas kampas 4 kartus didesnis už kitą;
b) vienas kampas 90° didesnis už kitą;
c) jų skirtumas lygus 40°.



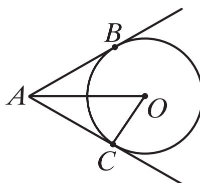
117. Apskritimo spindulys $r = 2$ dm. Apskaičiuokite lanko ilgį, kai lankas atitinka centrinį kampą, lygų:
1) 45°; 2) 60°; 3) 150°.
Skaičiuodami vietoj π imkite 3.

118. Skritulio spindulys lygus 6 cm. Apskaičiuokite skritulio išpjovos plotą, kai ją atitinkantis centrinis kampas lygus:
1) 50°; 2) 240°; 3) 300°; 4) 320°.
Skaičiuodami vietoj π imkite 3.

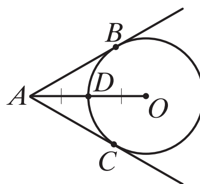
119. Tiesė AB taške B liečia apskritimą, kurio centras yra taške O ir spindulys lygus r. Apskaičiuokite atkarpos AB ilgį, kai $OA = 20$ cm, $r = 15$ cm.



120. AB ir AC yra apskritimo, kurio centras O, liestinės. Paveikslėlyje $OC = 4{,}5$ cm, $OA = 9$ cm. Apskaičiuokite AC, AB, $\angle BAO$ ir $\angle CAO$.



121. AB ir AC — apskritimo liestinės,
O — apskritimo centras,
$OD = DA$.
Apskaičiuokite kampo BAC dydį.



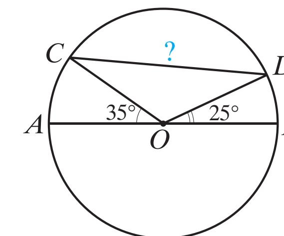
122. Apskritimo su centru O spindulys lygus 6 dm. Per tašką A, esantį šalia apskritimo, nubrėžtos dvi jo liestinės. Apskaičiuokite kampą tarp liestinių, jei $OA = 12$ dm.

123. Tiesės AB ir AC taškuose B ir C liečia apskritimą, kurio centras yra taške O. Apskaičiuokite stygos BC ilgį, kai $\angle OAB = 30°$, $AB = 15$ cm.

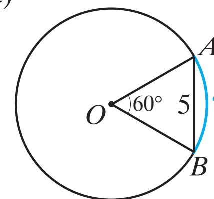
124. Apskaičiuokite skritulio išpjovos plotą, jei išpjovos lankas sudaro skritulį ribojančio apskritimo šeštadalį, o skritulio spindulys lygus 6 cm.

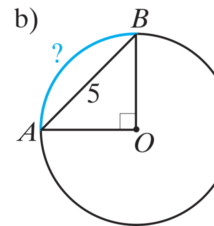
125. Skritulio skersmuo lygus 10 cm. Jo išpjovą riboja vienas kitam statmeni spinduliai. Koks yra išpjovos plotas?

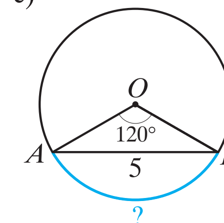
126. Apskritimo skersmuo $AB = 20$ cm, $\angle AOC = 35°$, $\angle BOD = 25°$.
Apskaičiuokite stygos CD ilgį.



127. A ir B yra apskritimo su centru O taškai. Apskaičiuokite lanko AB ilgį, jei žinomas $\angle AOB$ dydis, o atkarpos AB ilgis lygus 5 cm.

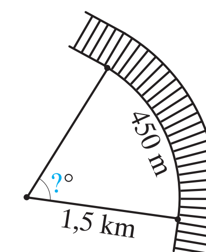
a)


b)


c)


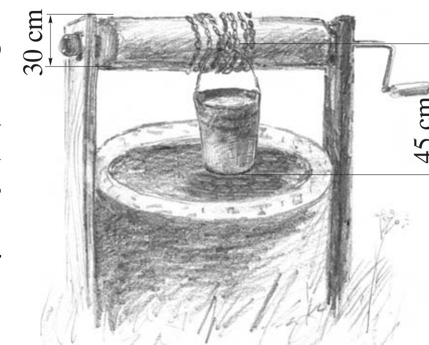
128. Ar nenukentės vandens pralaidumas, 80 mm skersmens vandentiekio vamzdį pakeitus dviem 40 mm skersmens vamzdžiais?

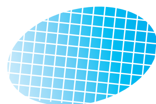
129. Geležinkelio posūkio spindulys lygus 1,5 km, o posūkio lanko ilgis yra 450 m. Raskite posūkio kampo dydį. Atsakymą parašykite 1° tikslumu (vietoj π imkite 3,1).



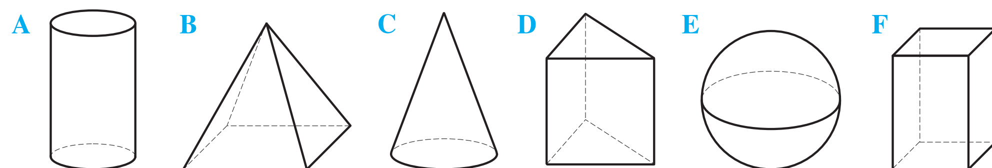


130. Pavaizduotas senovinis šulinys. Kibiro rankena yra ties veleno viduriu. Veleno rankeną apsukus lygiai 7 kartus, kibiro apačia paliečia vandenį. Kaip giliai yra vandens paviršius nuo veleno apačios, jei veleno skersmuo lygus 30 cm, o atstumas nuo kibiro dugno iki aukščiausio kibiro rankenos taško yra 45 cm? Atsakymą parašykite centimetro tikslumu.





131. Pavaizduoti erdviniai kūnai.



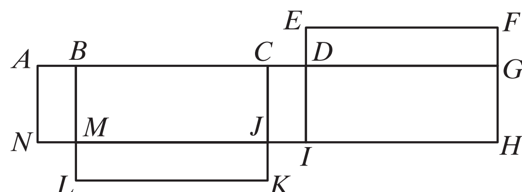
a) Kurie iš tų kūnų yra sukiniai, kurie — briaunainiai?
b) Kaip vadinamas kiekvienas pavaizduotas erdvinis kūnas?

132. Išreikškite nurodytais matavimo vienetais.

a) $4\,\text{dm} = \ldots\,\text{cm} = \ldots\,\text{m}$;
b) $1{,}5\,\text{cm} = \ldots\,\text{mm} = \ldots\,\text{dm}$;
c) $5\,\text{cm}^2 = \ldots\,\text{mm}^2 = \ldots\,\text{dm}^2$;
d) $3{,}4\,\text{dm}^2 = \ldots\,\text{cm}^2 = \ldots\,\text{m}^2$;
e) $2\,\text{a} = \ldots\,\text{m}^2 = \ldots\,\text{ha}$;
f) $5{,}6\,\text{ha} = \ldots\,\text{a} = \ldots\,\text{m}^2$;
g) $7\,\text{dm}^3 = \ldots\,\text{cm}^3 = \ldots\,\text{m}^3$;
h) $6{,}84\,\text{cm}^3 = \ldots\,\text{mm}^3 = \ldots\,\text{dm}^3$;
i) $8\,\text{cm}^3 = \ldots\,\text{m}\ell = \ldots\,\ell = \ldots\,\text{dm}^3$.

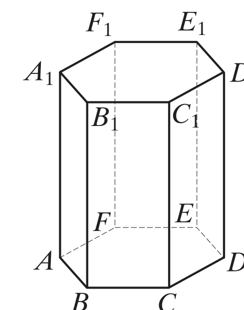
133. Vaikai iš plastilino lipdė kubelius. Roko nulipdyto kubelio briauna lygi 5 cm, Motiejaus — 4 cm, Emilės — 3 cm. Tada iš tų visų trijų kubelių plastilino vaikai nulipdė vieną kubą. Koks to kubo briaunos ilgis? viso paviršiaus plotas? tūris?

134. Pavaizduota erdvinio kūno išklotinė.



1) Kaip vadinamas tas erdvinis kūnas?
2) Kuris išklotinės taškas sutaps su tašku E, kai iš jos sulankstysime erdvinį kūną?
3) Apskaičiuokite to erdvinio kūno viso paviršiaus plotą ir tūrį, kai $AB = 1$ dm, $AN = 0{,}8$ m, $BC = 1{,}6$ m.

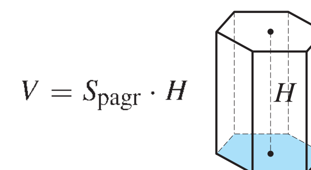
135. Pavaizduota stačioji prizmė, kurios pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis.

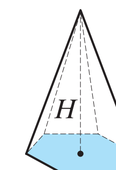


1) Surašykite prizmės:
   a) pagrindus;
   b) šonines sienas;
   c) pagrindų briaunas;
   d) šonines briaunas;
   e) priešingų sienų poras.
2) Žinoma, kad $AB = 4$ cm, $AA_1 = 8$ cm, $S_{ABCDEF} = 60\,\text{cm}^2$.
   Apskaičiuokite prizmės:
   a) šoninės sienos BB_1C_1C plotą;
   b) viso paviršiaus plotą;
   c) tūrį.

- Stačiosios prizmės tūris yra lygus pagrindo ploto ir aukštinės (šoninės briaunos) ilgio sandaugai.

$V = S_{\text{pagr}} \cdot H$



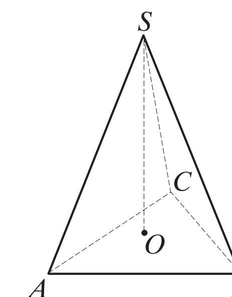


$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{pagr}} \cdot H$

- Piramidės tūris yra lygus pagrindo ploto ir piramidės aukštinės ilgio sandaugos trečdaliui.



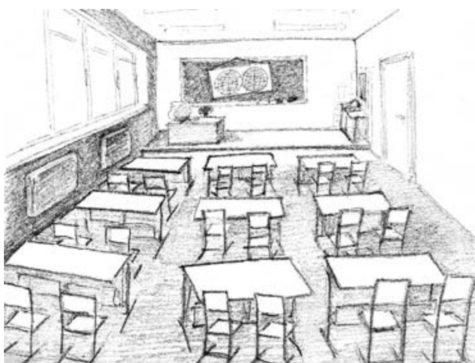
136. Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė.



1) Surašykite piramidės:
   a) viršūnę;
   b) pagrindo viršūnes;
   c) šonines sienas;
   d) pagrindo briaunas;
   e) aukštinę.
2) Žinoma, kad piramidės pagrindo briauna lygi 2 cm, šoninė briauna — 3 cm, o piramidės aukštinė — $\sqrt{\frac{23}{3}}$ cm.
   Apskaičiuokite piramidės:
   a) pagrindo plotą; b) šoninės sienos plotą;
   c) viso paviršiaus plotą; d) tūrį.

8 skyrius

Klasė



1 užduotis. Žiūrėdami į patalpą (klasę ar kambarį), kurioje esate, atsakykite į klausimus.

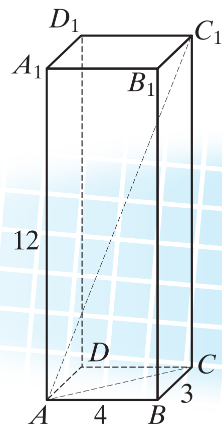
1) Ar klasės priekinė siena ir galinė siena kirstųsi, tas sienas pratęsus iki begalybės?
2) Parodykite kitas sienų poras, kurios yra nesikertančiose plokštumosė, taigi yra lygiagrečios.

Plokštumà, kaip ir tiesẽ, yra begalinė.
Plókštumą galima įsivaizduoti kaip be galo didelį popieriaus lapą, neturintį kraštų.



3) Parodykite dvi sienas, kurios kertasi. Parodykite bendrąją tų sienų dalį.
4) Parodykite kitas sienų poras, kurios kertasi.
5) Kaip manote, kokiu kampu kertasi stačiakampio gretasienio formos patalpos sienos?

2 užduotis. Pavaizduotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$, jo pagrindo įstrižaĩnė AC ir stačiakampio gretasienio įstrižainė AC_1.



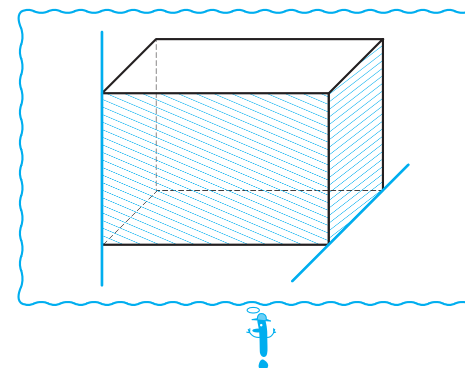
Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, apskaičiuokite:

a) $\angle CAB$;
b) $\angle CAC_1$.

O kaip apskaičiuoti kampą tarp stačiakampio gretasienio įstrižainės AC_1 ir pagrindo plokštumos?



Erdvinių kūnų tiesės ir plokštumos



Šiame skyriuje kalbėsime apie:

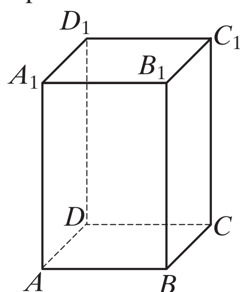
- erdvės tieses ir plókštumas;
- kampą tarp tiesės ir plokštumõs;
- kampą tarp plokštumũ.

8.1. ERDVINIŲ KŪNŲ TIESĖS

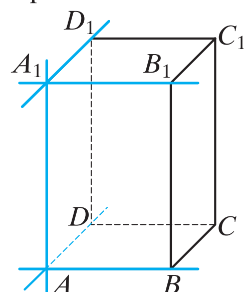
Užduotis.

1) Nubraižykite stačiakam̃pį gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kaip parodyta 1 pav. Išvardykite jo briaunàs.

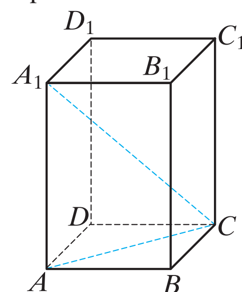
1 pav.



2 pav.



3 pav.



2) Išvardykite tieses, kurios eina per stačiakampio gretasienio briaunas ir per viršū̃nę A; viršū̃nę A_1 (žr. 2 pav.). Kurios išvardytos tiesės susikerta? yra lygiagrečios? nei susikerta, nei yra lygiagrečios (prasilenkia)?

Tiesės A_1D_1, A_1B_1, ir A_1A yra *susìkertančiosios* — jos kertasi taške A_1.
Taške A kertasi šios tiesės: ...
Lygiagrẽčiosios yra šios poros tiesių: A_1D_1 ir AD (*rašoma*: $A_1D_1 \parallel AD$), ...
Nei lygiagrečios, nei susikertančios yra šios poros tiesių: A_1D_1 ir AB, ...
Tokios erdvės tiesės vadinamos ***prasileñkiančiosiomis tiesėmìs***.



3) Surašykite visas gretasienio briaunų tiesès, kurios su tiesè CC_1: yra susikertančios; yra lygiagrečios; yra prasilenkiančios.

4) Nubrėžkite stačiakampio gretasienio įstrižainę A_1C ir pagrindo įstrižainę AC (žr. 3 pav.). Surašykite visas stačiakampio gretasienio ir jo sienų įstrižainès.

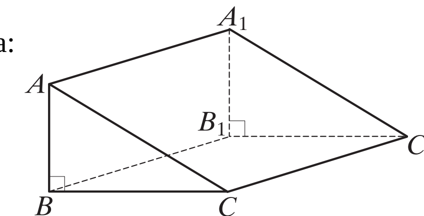
Visos stačiakampio gretasienio įstrižainės kertasi viename taške.



Kurios iš tiesių, einančių per visas surašytas įstrižaines:
yra lygiagrečios su tiese AC?
prasilenkia su tiese AC?
prasilenkia su tiese A_1C?

137. Pavaizduota stačióji trikam̃pė prìzmė, kurios pagrindas — statùsis trìkampis.

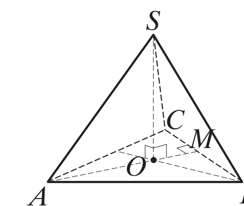
1) Išvardykite prizmės briaunas, kurios yra:
   a) lygiagrečiose tiesėse;
   b) susikertančiose tiesėse;
   c) prasilenkiančiose tiesėse.



2) Apskaičiuokite:
   a) pagrindo briaũną AB (1 cm tikslumu), jei $AC = 22$ cm, $\angle BCA = 35°$;
   b) pagrindo plotą (1 cm^2 tikslumu);
   c) prizmės tū̃rį, jei $AA_1 = 60$ cm.

138. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ pagrindo aukštinė $AM = 36$ cm, o piramidės aukštinė $SO = 7$ cm.

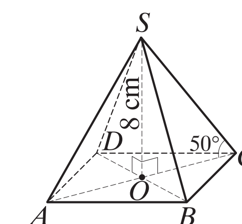
1) Kurios briaũnos yra tiesėsè, prasilenkiančiose su tiese, einančia per:
   • briauną SB?
   • pagrindo aukštinę AM?
   • piramidės aukštinę SO?
2) Apskaičiuokite piramidės briaunų ilgiùs.
3) Apskaičiuokite piramidės tū̃rį.



$\triangle ABC$ — lygiakraštis

139. Pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė $SABCD$. Nubrėžta tos piramidės aukštinė $SO = 8$ cm ir pagrindo įstrižainės AC ir BD. Kampo SCO dydis yra 50°.

a) Surašykite piramidės briaunas, kurios yra tiesėse:
   • prasilenkiančiose su briaunõs BC tiese;
   • lygiagrečiose su briaunos AB tiese;
   • prasilenkiančiose su briaunos SB tiese.
b) Apskaičiuokite (vieneto tikslumu):
   1) SC il̃gį; 2) AC ilgį; 3) AB ilgį;
   4) šoninės sienos aukštinės ilgį;
   5) pagrindo plotą;
   6) šoninės sienos plotą;
   7) piramidės viso paviršiaus plotą;
   8) piramidės tū̃rį.



$ABCD$ — kvadratas, šoninės sienos — lygūs lygiašoniai trikampiai

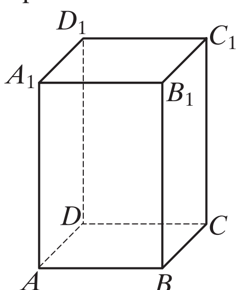
140. Viena kubo įstrižainė lygi $3\sqrt{3}$.
1) Kam lygios kitos to kubo įstrižainės? 2) Kam lygi kubo briauna?
3) Kam lygios kubo sienų įstrižainės?

8.2. ERDVINIŲ KŪNŲ PLOKŠTUMOS

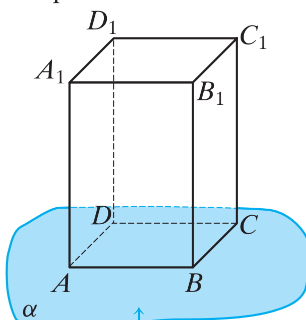
Užduotis.

1) Nubraižykite stačiakampį gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ir surašykite visas jo sienas (žr. 1 pav.).

1 pav.

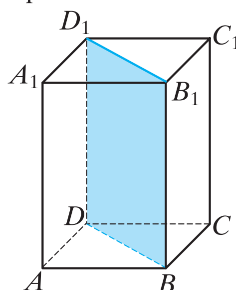


2 pav.



Pagrindo plokštuma $ABCD$, arba plokštuma α.

3 pav.



2) Išvardykite sienas, kurios su siena $ABCD$ turi bendrą briauną; neturi bendros briaunos.

Dėmesio! Per kiekvieną gretasienio sieną eina vienintelė plokštuma. Plokštuma, kaip ir tiesė, yra begalinė — ji neturi kraštų.

- Per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.
- Per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.
- Nėra plokštumos, kuri eina per dvi prasilenkiančias tieses.

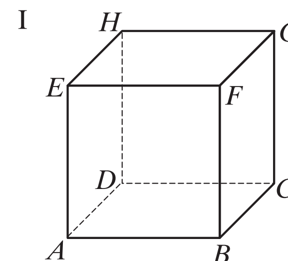
Dvi plokštumos, kurios turi bendrą tiesę, vadinamos ***susikertančiosiomis***.
Dvi plokštumos, kurios neturi bendros tiesės, vadinamos ***lygiagrečiosiomis***.

3) Pasakykite stačiakampio gretasienio sienos plokštumą, lygiagrečią su sienos $ABCD$ plokštuma (žr. 2 pav.).

4) Trečiame paveikslėlyje pavaizduota stačiakampio gretasienio plokštuma, einanti per briaunas BB_1 ir DD_1.
a) Pavaizduokite plokštumą, einančią per briaunas A_1D_1 ir BC.
b) Apskaičiuokite įstrižinio pjūvio BB_1D_1D plotą, jei gretasienio matmenys centimetrais yra $3 \times 4 \times 11$.

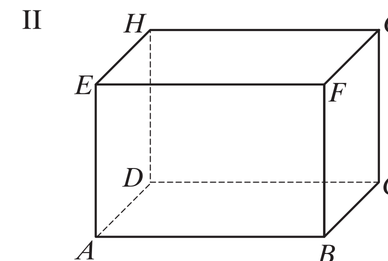
141. Pavaizduotas stačiakampis gretasienis.

I



$ABCDEFGH$ — kubas, $AB = 3$ cm;

II

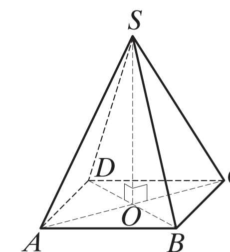


$AB = 5$ cm, $BF = 3$ cm, $BC = 1$ cm.

1) Persibraižykite stačiakampį gretasienį ir išryškinkite jo plokštumą, einančią per:
a) briaunas EH ir BC;
b) pagrindų įstrižaines HF ir DB;
c) šoninių sienų įstrižaines AF ir FC.
2) Apskaičiuokite gautų plokštumų figūrų perimetrus ir surašykite juos didėjimo tvarka.

142. Pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė $SABCD$.

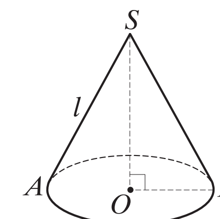
1) Pasakykite plokštumas, einančias:
a) per taškus A, D, S;
b) per taškus A, D, O;
c) per pagrindo įstrižainę ir viršūnę S;
d) per piramidės aukštinę ir pagrindo įstrižainę;
e) per piramidės šoninę briauną ir pagrindo briauną.



- Per du taškus eina vienintelė tiesė.
- Per tris taškus, kurie nėra vienoje tiesėje, eina vienintelė plokštuma.

2) Piramidės pagrindo kraštinė ir piramidės aukštinė yra lygios 10 cm. Apskaičiuokite plotą:
a) piramidės plokštumos, einančios per taškus B, D, S;
b) piramidės plokštumos, einančios per piramidės aukštinę ir per pagrindo priešingų kraštinių vidurio taškus.

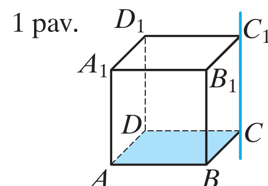
143. Pavaizduotas kūgis, kurio pagrindo spindulys yra r, sudaromoji lygi l.
1) Apskaičiuokite kūgio plokštumos, einančios per kūgio aukštinę, plotą, kai $r = 5$ dm, $l = 8$ dm.
2) Apskaičiuokite tos kūgio plokštumos kampo S dydį (1° tikslumu).



8.3. KAMPAS TARP TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

1 užduotis. Pirmame paveikslėlyje išryškinta stačiakampio gretasienio šoninės briaunos tiesė ir pagrindo plokštuma.

1 pav.



Tiesė CC_1 yra statmena plokštumai $ADCB$.
Rašoma: $CC_1 \perp ADCB$, arba $\angle(CC_1;\ ADCB) = 90°$.

1) Kam lygus kampas tarp tiesės CC_1 ir tiesės CB? tiesės CD? tiesės CA?

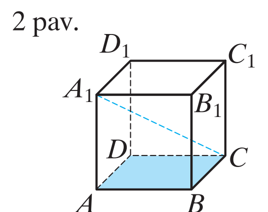
Dėmesio! Tiesė a vadinama ***stãtmena plókštumai*** α, jei a yra statmena kiekvienai α tiesei, einančiai per a ir α sankirtos tašką (tas taškas vadinamas tiesės a pagrindu).

Jei tiesė a yra statmena dviem plokštumos α susikertančioms tiesėms, tai tiesė a yra statmena plokštumai α.

2) Kurioms gretasienio sienų plokštumoms yra statmena tiesė CC_1? tiesė BB_1? tiesė A_1B_1? tiesė DC?

2 užduotis. Antrame paveikslėlyje išryškinta stačiakampio gretasienio įstrižainės tiesė ir pagrindo plokštuma.

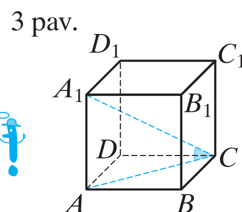
2 pav.



Akivaizdu, kad tiesė A_1C nėra statmena plokštumai $ABCD$. Tokia tiesė vadinama ***pasvirája***.

Kur yra kampas tarp pasvirõsios ir plokštumos?

3 pav.

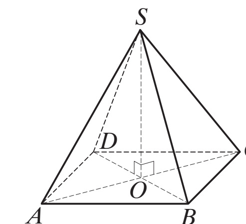


Kampas tarp A_1C ir $ABCD$ pavaizduotas 3 pav.: $\angle(A_1C;\ ABCD) = \angle ACA_1$.

Dėmesio! Tiesė AC (žr. 3 pav.) yra vadinama tiesės A_1C ***projèkcija*** plokštumoje $ABCD$. (Taškas C vadinamas pasvirosios A_1C pagrindu.) Kampu tarp pasvirosios ir plokštumos vadinamas kampas tarp pasvirosios ir jos projekcijos toje plokštumoje.

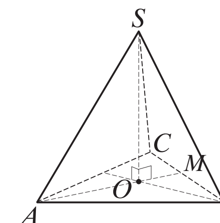
1) Nusibraižykite stačiakampį gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (kaip 3 pav.) ir pažymėkite kampą tarp pasvirosios A_1C ir plokštumos $A_1B_1C_1D_1$.
2) Užrašykite, kam lygus $\angle(A_1C;\ BCC_1B_1)$; $\angle(CA_1;\ AA_1B_1B)$.

144. Pavaizduota taisyklìngoji keturkam̃pė piramìdė $SABCD$. Pasakykite ir užrašykite kampą tarp piramidės:
a) šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos;
b) aukštinės ir pagrindo plokštumos.



145. Nubraižykite kubą, kurio briaunos ilgis lygus 6 cm. Jame nubraižykite ir apskaičiuokite: 1) pagrindo įstrižainę; 2) kubo įstrižainę;
3) kampą tarp kubo įstrižainės ir pagrindo plokštumos (1° tikslumu).

146. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo aukštinė $AM = 6$ cm, o piramidės aukštinė $SO = 7$ cm. Apskaičiuokite:
1) piramidės šoninę briauną;
2) kampą tarp piramidės šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos (1° tikslumu).



147. a) Nubraižykite kokią nors taisyklingąją trikampę piramidę. Paveikslėlyje parodykite, kur yra kampas tarp tos piramidės apotemos ir pagrindo.
b) Nubraižykite kokį nors kū̄gį. Paveikslėlyje parodykite, kur yra kampas tarp kū̄gio sudaromosios ir pagrindo.
c) Nubraižykite kokį nors tetraedrą. Paveikslėlyje parodykite, kur yra kampas tarp šoninės briaunos ir pagrindo.

148. Kubo briaunos ilgis yra 5 cm. Apskaičiuokite kampo tarp kubo įstrižainės ir pagrindo plokštumos kosinusą.

149. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai yra 8 cm ir 12 cm, o šoninės briaunos ilgis — 24 cm. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio:
1) įstrižainės ilgį; 2) kampą tarp įstrižainės ir pagrindo (1° tikslumu);
3) tū̄rį; 4) viso paviršiaus plotą.

150. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai yra 120 cm ir 200 cm, o įstrižainė su pagrindo plókštuma sudaro 40° kampą. Raskite gretasienio aukštinės ilgį (1 cm tikslumu).

151. Stačiakampio gretasienio pagrindas yra kvadratas, kurio plokštuma su gretasienio įstrižainė sudaro 35° kampą. Apskaičiuokite įstrižainės ilgį (1 dm tikslumu), kai $S_{\text{pagr}} = 144\ \text{dm}^2$.

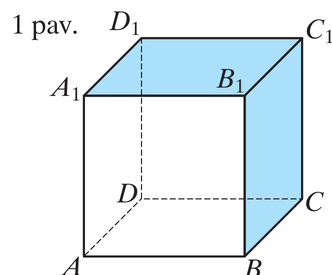
152. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi 20 ir yra pasvirusi į pagrindą 30° kampu. Raskite:
1) pagrindo kraštinės ilgį; 2) visų briaunų ilgių sumą.

153. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo briauna lygi 10 cm. Apskaičiuokite:
1) pagrindo įstrižainės ilgį;
2) aukštinės ilgį (1 cm tikslumu), jei kampas tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos lygus 55°;
3) šoninės briaunos ilgį (0,1 cm tikslumu).

8.4. KAMPAS TARP PLOKŠTUMŲ

1 užduotis. Pirmame paveikslėlyje išryškintos stačiakampio gretasienio dviejų susikertančių plokštumų sienos.

1 pav.

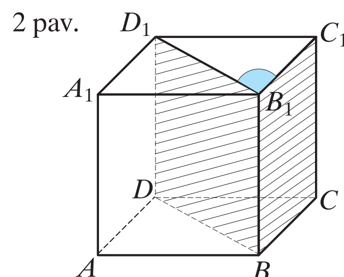


Plokštuma $A_1B_1C_1D_1$ yra statmena plokštumai BCB_1C_1.
Rašoma: $A_1B_1C_1D_1 \perp BCB_1C_1$,
arba $\angle(A_1B_1C_1D_1;\ BCB_1C_1) = 90°$.

Kurioms gretasienio sienų plokštumoms yra statmena plokštuma $ABCD$? plokštuma AA_1DD_1?

2 užduotis. Antrame paveikslėlyje parodytas kampas tarp stačiakampio gretasienio plokštumos BDD_1B_1 ir plokštumos BB_1C_1C.

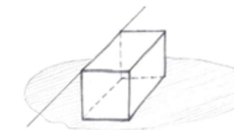
2 pav.



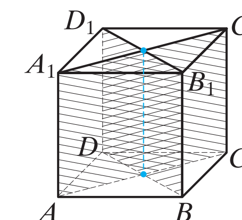
$\angle(BDD_1B_1;\ BB_1C_1C) = \angle D_1B_1C_1$.

Nusibraižykite stačiakampį gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (kaip 2 pav.), išryškinkite plokštumas AA_1D_1D ir BDD_1B_1, pažymėkite kampą tarp tų plokštumų ir užrašykite jį.

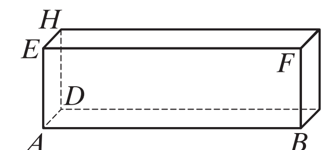
Dėmesio! Kai reikia nurodyti kampą tarp dviejų susikertančių plokštumų α ir β, tai pakanka nubrėžti trečią plokštumą γ, kuri būtų statmena plokštumų α ir β susikirtimo tiesei.
Kampas tarp plokštumų α bei γ susikirtimo tiesės ir plokštumų β bei γ susikirtimo tiesės yra vadinamas kampu tarp plokštumų α ir β.



154. Pavaizduotas kubas ir parodytos jo pjūvių plókštumos, einančios per pagrindų įstrižaines.
1) Kam lygus tų plokštumų susikirtimo atkarpos ilgis, jei kubo briauna lygi 20 mm?
2) Kam lygus kampas tarp tų plokštumų?
3) Kam lygūs kampai tarp tų plokštumų ir šoninių sienų?
4) Kam lygūs kampai tarp tų plokštumų ir pagrindų?

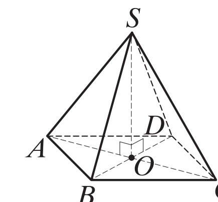


155. 1) Nubraižykite stačiakampį gretasienį $ABCDEFGH$.

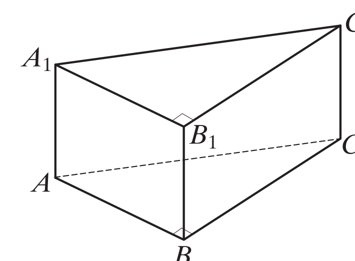


2) Nubraižykite jo pjūvį, einantį per briaunas HG ir AB.
3) Pažymėkite kampą tarp to pjūvio ir pagrindo; tarp to pjūvio ir sienos $CDHG$.
4) Apskaičiuokite 3) punkto kampų dydžius (1° tikslumu), jei $AB = 10$ cm, $BC = 2$ cm, $BF = 3$ cm.

156. Nubraižykite taisyklingąją keturkampę piramidę $SABCD$.
1) Pažymėkite kampą tarp šoninės sienos ir pagrindo.
2) Apskaičiuokite to kampo dydį, jei pagrindo įstrižainė lygi $4\sqrt{2}$ m, o šoninės sienos aukštinė — 4 m.



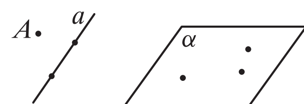
157. Pavaizduota stačioji trikampė prizmė, kurios pagrindas yra statusis trikampis.



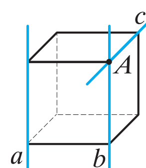
1) Surašykite visas tarpusavyje stãtmenas prizmės sienų poras.
2) Apskaičiuokite kampus tarp prizmės sienų BB_1A_1A ir AA_1C_1C; sienų AA_1C_1C ir BB_1C_1C, jei:
a) $AC = 2 \cdot AB$; b) $AB = BC$; c) $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm.

APIBENDRINAME

Erdvės geometrija
Pagrindinės erdvės figūros yra tãškas, tiesė̃ ir plokštumà.
Plokštuma, kaip ir tiesė, yra begalinė.
Per du taškus eina vienintelė tiesė.
Per tris taškus, nesančius vienoje tiesėje, eina vienintelė plokštuma.

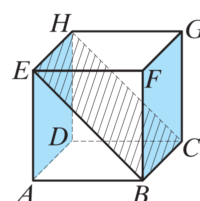


Erdvės tiesės
Dvi tiesės erdvėje gali:
- kirstis;
- būti lygiagrečios;
- prasilenkti.



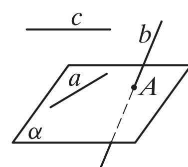
$b \cap c = A$,
$a \parallel b$,
a prasilenkia su c.

Erdvės plokštumos
Dvi erdvės plokštumos gali:
- kirstis;
- būti lygiagrečios.



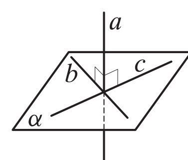
$ADHE \parallel BCGF$,
$EHCB$ kerta visas gretasienio sienų plokštumas.

Kampas tarp tiesės ir plokštumos
Tiesė gali būti plokštumojè, gali kirsti plókštumą ir gali būti lygiagreti su plókštuma.



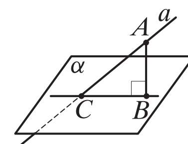
$a \in \alpha$,
$b \cap \alpha = A$,
$c \parallel \alpha$.

Tiesė a, kuri yra statmena kiekvienai plokštumos α tiesei, einančiai per a ir α sankirtos tašką, vadinama statmena tai plokštumai.
Jei tiesė yra statmena dviem susikertančioms plokštumos tiesėms, tai ta tiesė yra statmena plokštumai.



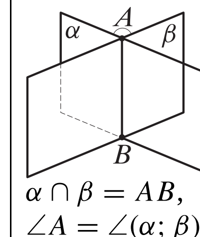
$a \perp b, a \perp c, \Rightarrow a \perp \alpha$.

Tiesė, kuri kerta plokštumą ir nėra statmena tai plokštumai, vadinama ***pasvirája***.
Pasvirosios ir plokštumos bendras taškas vadinamas ***pasvirosios pagrindu.***
Kampu tarp pasvirosios a ir plokštumõs α vadinamas kampas tarp tos pasvirosios ***projèkcijos*** plokštumoje α ir pasvirosios.
Pasvirosios projekciją plokštumoje randame taip:
1) iš bet kurio pasvirosios taško (nesutampančio su pagrindu) brėžiame statmenį į plokštumą;
2) per pasvirosios pagrindą ir nubrėžto statmens pagrindą brėžiame tiesę.
Ta tiesė ir yra pasvirosios projekcija plokštumoje.



$\angle ACB = \angle(a; \alpha)$,
a — pasviroji,
C — pasvirosios pagrindas,
$AB \perp \alpha$,
B — statmens pagrindas,
CB — pasvirosios projekcija.

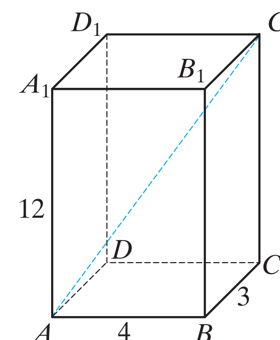
Kampas tarp plokštumų
Dvi susikertančios plokštumos turi bendrą tiesę.
Kampą tarp dviejų susikertančių plokštumų α ir β randame taip:
1) brėžiame trečią plokštumą γ, statmeną tų susikertančių plokštumų bendrajai tiesei a;
2) randame tos trečiosios plokštumos γ ir kiekvienos iš plokštumų α ir β susikirtimo tieses b ir c.
Kampas tarp tiesių b ir c ir yra kampas tarp plokštumų α ir β.



$\alpha \cap \beta = AB$,
$\angle A = \angle(\alpha; \beta)$.

Kampas tarp stačiakampio gretasienio įstrižainės ir sienos

Prisiminkime stačiakampį gretasienį, pavaizduotą 56 puslapyje (žr. 2 užduotį).



Duota:
$AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 12$.
Apskaičiuoti:
kampus tarp AC_1 ir sienų.

Apskaičiuokite (1° tikslumu):
a) kampą tarp įstrižainės AC_1 ir sienos CDD_1C_1; $ABCD$; $A_1B_1C_1D_1$; ABB_1A_1; BB_1C_1C; ADD_1A_1;
b) kampą tarp įstrižainių AC_1 ir BD_1.

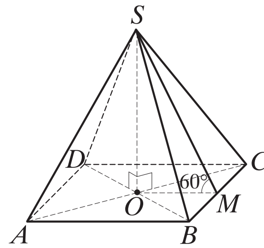
Apskaičiuokime kampo tarp įstrižainės AC_1 ir sienos CDD_1C_1 dydį.

1) Kampas tarp AC_1 ir CDD_1C_1 yra lygus kampui tarp AC_1 ir jos projekcijos sienoje CDD_1C_1. Įstrižainės AC_1 projekcija sienoje CDD_1C_1 yra tos sienos įstrižainė C_1D. Vadinasi, mums reikia apskaičiuoti $\angle AC_1D$.
Tą kampą nustatysime iš $\triangle AC_1D$ ($\angle D = 90°$, $AD = 3$).
2) Apskaičiuokime AC_1 ilgį:
   - Apskaičiuojame AC ilgį. Iš $\triangle ABC$ ($\angle B = 90°$, $AB = 4$, $BC = 3$): $AC^2 = AB^2 + BC^2, \Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
   - Apskaičiuojame AC_1 ilgį. Iš $\triangle ACC_1$ ($\angle C = 90°$, $AC = 5$, $CC_1 = 12$): $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2, \Rightarrow AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
3) Iš $\triangle AC_1D$ ($\angle D = 90°$, $AD = 3$, $AC_1 = 13$) apskaičiuojame kampo C_1 sinusą: $\sin \angle DC_1A = \frac{AD}{AC_1} = \frac{3}{13} \approx 0{,}23$.
Skaičiuotuvu (ar iš lentelės) randame $\angle DC_1A \approx 13°$.

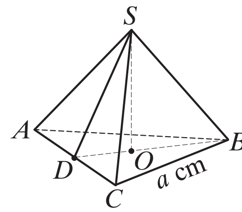
Atsakymas. $\angle(AC_1; CDD_1C_1) \approx 13°$.

SPRENDŽIAME

158. Nubraižyta taisyklingoji keturkampė piramidė $SABCD$, kurios pagrindo briauna lygi 12 cm, $\angle SMO = 60°$ (M — pagrindo briaunos vidurio taškas, O — pagrindo įstrižainių susikirtimo taškas, SO — piramidės aukštinė). Apskaičiuokite:
1) šoninės sienos aukštinės (apotemos) ilgį;
2) piramidės aukštinės ilgį; 3) kampo ACS dydį;
4) piramidės tūrį; 5) piramidės viso paviršiaus plotą.

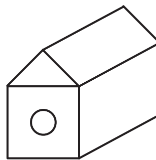


159. Tetraedro briauna lygi a cm. Apskaičiuokite:
1) tetraedro apotemos ilgį;
2) tetraedro aukštinės ilgį;
3) tetraedro tūrį;
4) tetraedro šoninio paviršiaus plotą;
5) kampo tarp sienų dydį ($\angle SDB$);
6) kampo tarp šoninės sienos aukštinės ir piramidės aukštinės ($\angle DSO$) dydį.

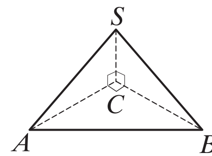


160. Stiklo plokštė yra stačiakampio formos. Plokštės matmenys yra 1 m × 1,25 m. Ta plokštė atremta į sieną taip, kad vienas jos kraštas, kuris remiasi į grindis, yra nuo sienos nutolęs 44 cm atstumu. Kokį kampą sudaro plokštė su grindimis (atsakymą užrašykite 1° tikslumu)?

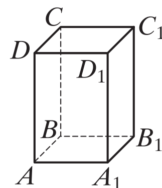
161. Šuns būdos stogo šonai yra dvi stačiakampės plokštės (30 cm × 70 cm). Tos plokštės sudaro 60° kampą. Ar gali būdos plotis būti lygus 60 cm? Atsakymą pagrįskite.



162. Apskaičiuokite piramidės kampų SAC ir SBC dydžius, jei žinoma, kad $\angle ASB = 60°$.



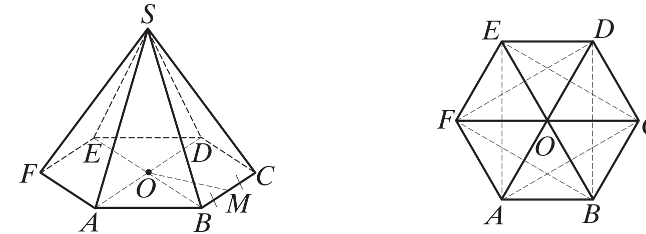
163. Stačiakampio gretasienio briaunos $AB = 6$ cm, $AD = 8$ cm, $AA_1 = 6$ cm.
Apskaičiuokite dydį kampo tarp:
1) AB ir BC; 2) AB ir C_1D_1;
3) DC ir A_1D_1; 4) AB_1 ir CC_1;
5) AB ir DC; 6) AB_1 ir B_1C;
7) A_1DCB_1 ir $ABCD$; 8) ADC_1B_1 ir $ABCD$.



164. Apskaičiuokite kampą tarp kubo įstrižainės ir pagrindo (1° tikslumu).

165. Apskaičiuokite taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ kampą (1° tikslumu) tarp šoninės briaunos SA ir pagrindo ABC, kai $AB = 6$ m, $SA = 4\sqrt{3}$ m.

166. Pavaizduota taisyklingoji šešiakampė piramidė ir jos pagrindas.



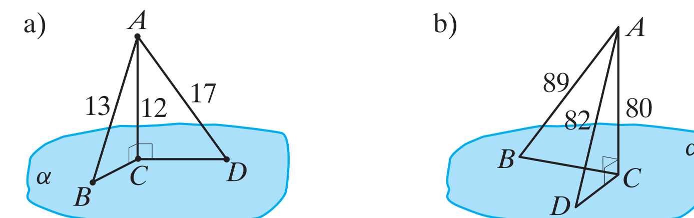
Piramidės pagrindo kraštinės ilgis yra 1 dm, o kampas tarp šoninės briaunos ir pagrindo ($\angle ADS$) lygus 60°.
1) Apskaičiuokite piramidės pagrindo ilgiausios įstrižainės ilgį ($AD = BE = FC$).
2) Apskaičiuokite piramidės pagrindo trumpiausios įstrižainės ilgį ($AE = EC = CA = BF = FD = DB$).
3) Kiek kartų piramidės šoninė briauna yra ilgesnė už pagrindo kraštinę?
4) Apskaičiuokite piramidės aukštinės SO ilgį.
5) Apskaičiuokite piramidės tūrį.
6) Apskaičiuokite kampą (1° tikslumu) tarp šoninės sienos ir pagrindo ($\angle SMO$).

167. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ pagrindo aukštinė AM lygi 72 mm, o piramidės aukštinė SO yra 14 mm. Apskaičiuokite piramidės šoninės briaunos ilgį.

168. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindo briauna lygi 16 dm. Apskaičiuokite piramidės šoninės briaunos ilgį, jei piramidės aukštinė SO su šonine briauna sudaro kampą, lygų:
a) 30°; b) 45°; c) 60°; d) 20°; e) α°.

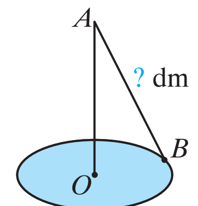
169. Kubo įstrižainė lygi $3\sqrt{3}$ cm. Koks yra tos įstrižainės projekcijos ilgis kiekvienoje iš kubo sienų?

170. Pavaizduota plokštuma α ir šalia jos esantis taškas A.



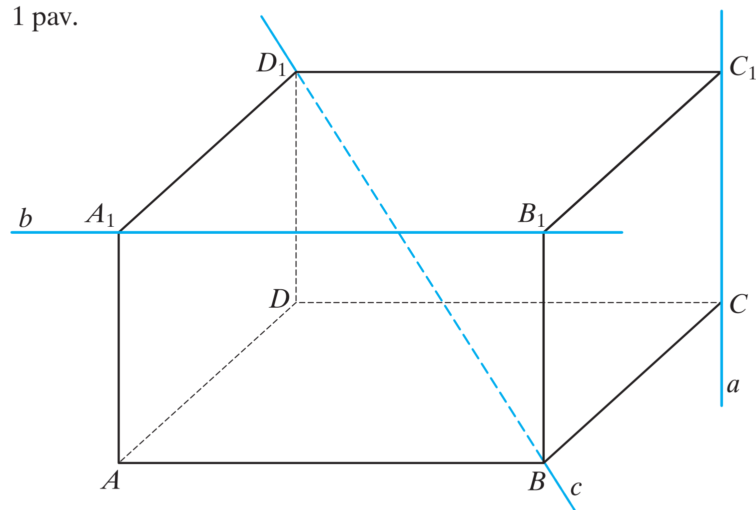
Iš taško A nubrėžtos dvi pasvirosios AB ir AD bei statmuo AC. Apskaičiuokite pasvirųjų projekcijų plokštumoje α ilgius.

171. Iš skritulio centro iškeltas statmuo OA į to skritulio plokštumą. Jo ilgis yra 20 dm. Apskaičiuokite atstumą nuo taško A iki apskritimo taško B, jei skritulio plotas lygus 441π dm^2.



Kaip rasti kampą tarp prasilenkiančiųjų tiesių?

1 pav.



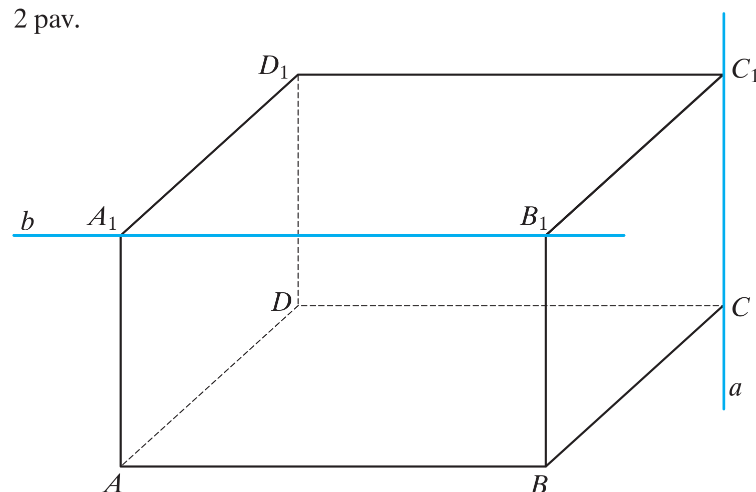
Stačiakampio gretasienio modelyje pavaizduotos trys tiesės a, b, ir c, kurios viena su kita neturi bendrų taškų ir yra prasilenkiančios.

Kaip nustatyti kampą tarp dviejų prasilenkiančiųjų tiesių?

Darome taip:
1) Pasirenkame vieną iš prasilenkiančiųjų tiesių.
2) Kitą tiesę pastumiame lygiagrečiai taip, kad ji kirstų pasirinktąją tiesę.
3) Randame kampą tarp tų susikertančių tiesių. Tas kampas vadinamas kampu tarp prasilenkiančiųjų tiesių.

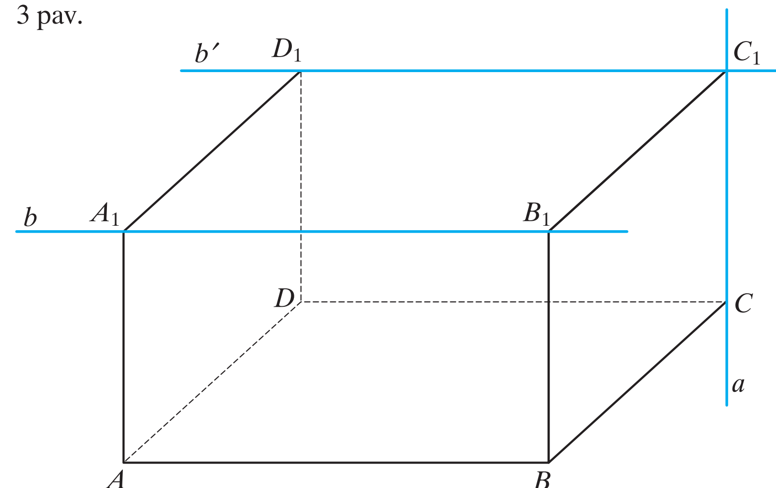
Pavyzdžiui, imkime prasilenkiančias tieses a ir b (žr. 2 pav.).

2 pav.



1) Raskime kampą tarp prasilenkiančių tiesių a ir b. Pasirinkime tiesę a.
2) Tiesę b pastumkime lygiagrečiai taip, kad ji kirstų tiesę a. Pavyzdžiui, tiesė b' kerta tiesę a ir yra lygiagreti su tiese b (žr. 3 pav.).

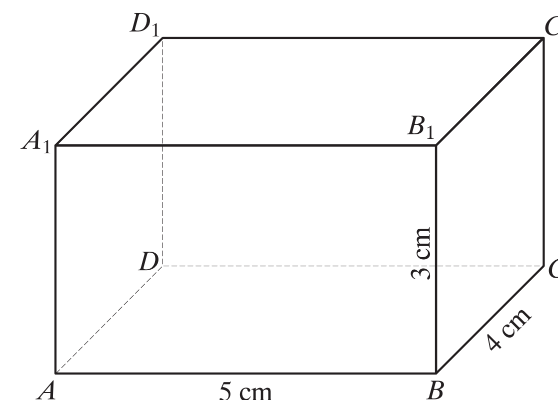
3 pav.



3) Raskime kampą tarp tiesių a ir b'. Žinoma, tas kampas yra status, t. y. $a \perp b'$, vadinasi, ir $a \perp b$.

Kampu tarp dviejų nesikertančiųjų gretasienio briaunų vadiname kampą tarp tiesių, kuriose yra tos briaunos.

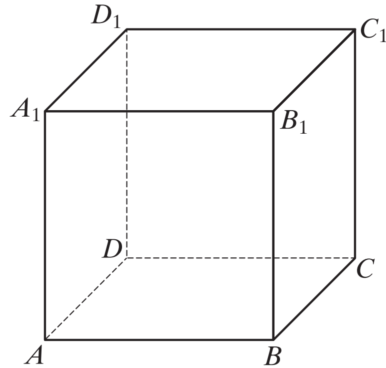
172. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ matmenys yra tokie: $AB = 5$ cm, $B = 4$ cm, $BB_1 = 3$ cm.



Apskaičiuokite kampą (1° tikslumu) tarp:
a) A_1D ir BC_1; b) AB_1 ir CD_1; c) AC ir B_1D_1;
d) BD_1 ir CC_1; e) A_1B_1 ir BD_1; f) AD ir A_1C.

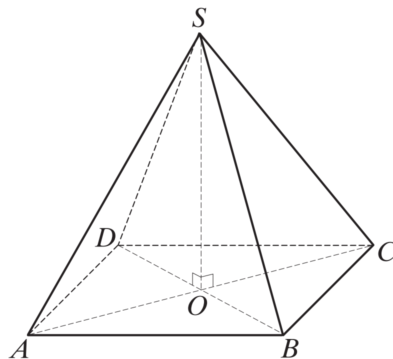
TESTAS

173. Pavaizduotas stačiakampis gretasienis.



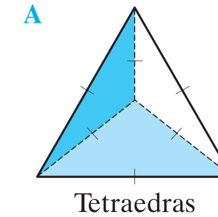
1) Tiesės AB ir D_1C_1
   A susikerta **B** yra lygiagrečios **C** prasilenkia
2) Tiesės AB ir BB_1
   A susikerta **B** yra lygiagrečios **C** prasilenkia
3) Tiesės AB ir A_1D_1
   A susikerta **B** yra lygiagrečios **C** prasilenkia

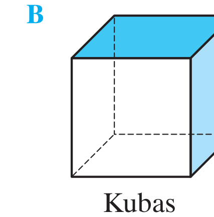
174. Pavaizduota taisyklingoji prizmė ir jos aukštinė.

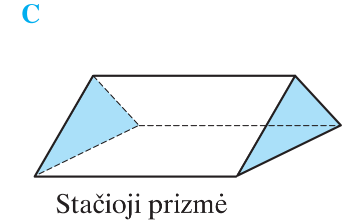


1) Tiesės AB ir DC
   A susikerta **B** yra lygiagrečios **C** prasilenkia
2) Tiesės AC ir SA
   A susikerta **B** yra lygiagrečios **C** prasilenkia
3) Tiesės AD ir SB
   A susikerta **B** yra lygiagrečios **C** prasilenkia

175. Pavaizduoti trys erdviniai kūnai.

A

Tetraedras

B

Kubas

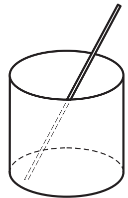
C

Stačioji prizmė

Kuriame erdviniame kūne paryškintos:

a) susikertančios stačiu kampu plokštumos?
   A A **B** B **C** C
b) lygiagrečiosios plokštumos?
   A A **B** B **C** C

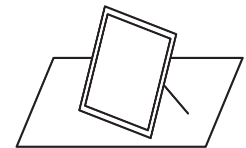
176. Į stiklinę, kurios dugnas yra skritulio formos, įdėtas šiaudelis. Kokį kampą (1° tikslumu) sudaro šiaudelis su stiklinės dugnu, jei stiklinės aukštis yra 14 cm, o dugno vidinis skersmuo — 6 cm?

A 25° **B** 69° **C** 21°



177. Ant stalo pastatytas įrėmintas kvadratinis paveikslėlis, kuris su stalo plokštuma sudaro 74° kampą. Koks rėmelio krašto ilgis (1 cm tikslumu), jei atstumas nuo rėmelio viršutinės briaunos iki stalo yra 22 cm?

A 21 cm **B** 6 cm **C** 23 cm



178. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna, kurios ilgis yra 10 cm, su pagrindu sudaro 60° kampą. Koks yra piramidės pagrindo plotas?

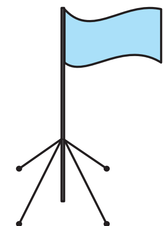
A 100 cm^2 **B** 50 cm^2 **C** $50\sqrt{2}$ cm^2

179. Stačiakampio gretasienio pagrindo briaunos lygios 3 cm ir 4 cm. Kokį kampą sudaro gretasienio įstrižainė su pagrindu, jei gretasienio aukštis yra 5 cm?

A 30° **B** 45° **C** 60°

180. Vėliavos stiebas pritvirtintas keturiomis atatampomis, kurių kiekviena su žemės paviršiumi sudaro 30° kampą. Kiek lyno sunaudota atatampoms, jei jos prie stiebo pritvirtintos 2 m aukštyje nuo žemės, o tvirtinant lyną sunaudota 20 % sunaudoto lyno kiekio.

A 16 m **B** 19,2 m **C** 20 m

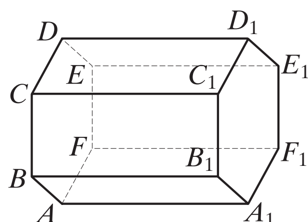


PASITIKRINAME

- Prizmė vadinama taisyklingąja, jei jos pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai, o šoninės sienos yra stačiakampiai.
- Piramidė vadinama taisyklingąja, jei jos pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai.



181. Pavaizduota taisyklingoji šešiakampė prizmė.

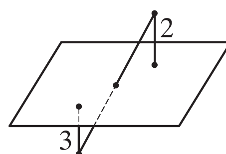


1) Kokia yra tarpusavio padėtis tiesių, kurios eina per briaunas:

a) AA_1 ir A_1F_1?	**A** yra lygiagrečios	**B** prasilenkia	**C** kertasi
b) AA_1 ir EE_1?	**A** yra lygiagrečios	**B** prasilenkia	**C** kertasi
c) AA_1 ir CB?	**A** yra lygiagrečios	**B** prasilenkia	**C** kertasi

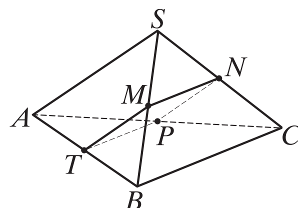
2) Kokio dydžio kampą sudaro dvi gretimos šoninės sienos?

182. Popieriaus lapas persmeigtas 10 cm ilgio metaliniu virbu. Virbo galai nutolę nuo lapo plokštumos atitinkamai 3 cm ir 2 cm atstumu. Apskaičiuokite:
1) kokio ilgio virbo dalys yra skirtingose lapo pusėse;
2) virbo dalių projekcijų popieriaus lape ilgius;
3) kampo tarp virbo ir lapo plokštumos dydį.



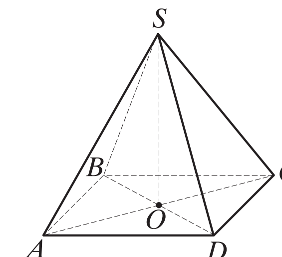
183. Stačiakampio gretasienio aukštinės ilgis lygus 10 dm, o pagrindo kraštinių ilgiai yra 8 dm ir 15 dm. Apskaičiuokite gretasienio įstrižainės ilgį (1 dm tikslumu) ir kampo, kurį sudaro jo įstrižainė su pagrindo plokštuma, dydį (1° tikslumu).

184. Pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė $SABC$, kurios pagrindas yra ABC. Taškai M, N, P, T atitinkamai yra briaunų SB, SC, AC, AB vidurio taškai. Apskaičiuokite keturkampio $MNPT$ perimetrą, jei $SA = 16$ cm, $BC = 14$ cm.

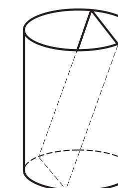


185. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 30° kampą, o jos ilgis lygus 8 cm. Apskaičiuokite prizmės:
1) pagrindo įstrižainės ilgį; 2) pagrindo plotą; 3) tūrį.

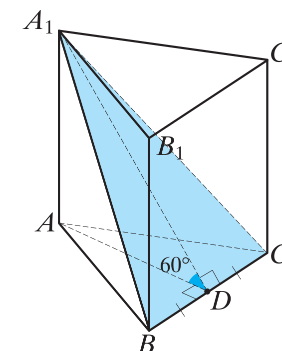
186. Pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios pagrindo įstrižainė lygi 30, o piramidės aukštinė lygi 15. Apskaičiuokite:
1) kampą tarp šoninės briaunos ir pagrindo;
2) šoninės briaunos ilgį;
3) šoninės aukštinės (apotemos) ilgį (0,01 tikslumu);
4) kampą tarp šoninės sienos ir pagrindo (1° tikslumu).



187. Į ritinio formos dėžutę, kurios dugno spindulys lygus $2\sqrt{2}$, įdėta stačiakampė plokštelė 4×10. Apskaičiuokite:
1) dėžutės aukštį;
2) kampo tarp plokštelės ir dėžutės dugno dydį (1° tikslumu).



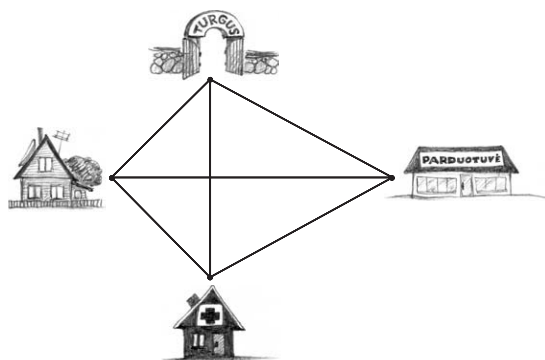
188. Taisyklingosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ šoninės briaunos lygios 3 cm. Pjūvio, einančio per pagrindo briauną BC ir viršūnę A_1, plokštuma su pagrindo ABC plokštuma sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite pjūvio plotą.



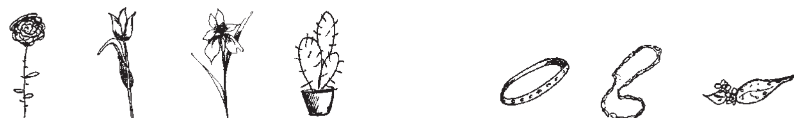
189. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi 16 cm. Piramidės šoninės sienos aukštinė (apotemà) pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Apskaičiuokite:
1) apotemos ilgį (1 cm tikslumu);
2) piramidės pagrindo kraštinės ilgį (1 cm tikslumu);
3) pagrindo įstrižainės ilgį (1 cm tikslumu);
4) šoninės briaunos ilgį (1 cm tikslumu);
5) kampo, kurį sudaro piramidės šoninė briauna su pagrindo plokštuma, dydį (1° tikslumu).

190. Surašykite visus penkiaženklius skaičius, kurių pirmasis (iš kairės) skaitmuo yra 2, antrasis — 0 arba 3, trečiasis — 3, ketvirtasis — 4 arba 5, penktasis — 5.

191. Jonas parduotuvėje turi nupirkti duonos, turguje — mėsos, o vaistinėje — vaistų. Surašykite visus Jono galimus maršrutus, jei visi jie prasideda ir baigiasi Jono namais.



192. Dominykas ruošiasi padovanoti savo draugei vieną gėlytę ir vieną papuošalą. Jis nusprendė dovanoti:
- arba rožę, arba tulpę, arba vilkdalgį, arba kaktusą;
- arba apyrankę, arba grandinėlę, arba segę.



1) Surašykite visus galimus Dominyko pasirinkimus:
   a) galimybių medžiu;
   b) galimybių lentele.
2) Kiek iš viso pasirinkimo galimybių turi Dominykas?

193. 1) Klasėje iš 4 mokinių renkamas seniūnas ir pavaduotojas. Kiek gali būti skirtingų seniūno ir pavaduotojo porų?
2) Iš 4 mokinių renkami du atstovai į mokyklos tarybą. Kiek yra skirtingų tokių porų?
3) Klasėje iš n mokinių renkamas seniūnas ir pavaduotojas. Kiek yra skirtingų seniūno ir pavaduotojo porų?
4) Iš n mokinių renkami du atstovai į mokyklos tarybą. Kiek yra skirtingų tokių porų?

194. Justė rengiasi vakarėliui. Ji renkasi batus, suknelę, rankinę ir kepuraitę.
- Batelius renkasi iš 5 porų.
- Suknelių yra 7.
- Gali pasiimti bet kurią iš trijų rankinių.
- Yra dvi tinkamos kepuraitės.

Kiek skirtingų apsirengimo variantų turi Justė?

Šį uždavinį patogu spręsti naudojantis daugybos taisykle.

Pavyzdžiui, jei renkamės kelnes iš 3 porų, o batus — iš 4 porų, tai pasirinkti kelnių ir batų porą yra $3 \cdot 4 = 12$ galimybių.



195. Lietuvių kalbos žodžiuose vartojami vadinamieji mišrieji dvigarsiai. Pirmoji dvigarsio raidė yra balsė: a, e, i, u, y, ū; antroji raidė yra priebalsė: l, m, n, r.
Tokių žodžių pavyzdžiai:
sk***ir***ti
sk***il***ti
sk***en***do
s***al***di
aukš***tyn***
d***ūm***traukis

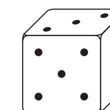
Mišrieji dvigarsiai, turintys balses a, e, i ir u, vadinami pirminės kilmės dvigarsiais, o turintys ilgąsias balses y ir ū — antrinės kilmės dvigarsiais.



1) Kiek lietuvių kalboje yra pirminės kilmės mišriųjų dvigarsių?
2) Kiek lietuvių kalboje yra mišriųjų dvigarsių iš viso?

196. Metama moneta ir stebima, kuria puse į viršų (herbu ar skaičiumi) ji atvirto.
1) Kokios galimos šio bandymo baigtys?
2) Kiek yra baigčių, palankių įvykiui:
   A — moneta atvirto skaičiumi?
   B — moneta atvirto herbu?
3) Kuris įvykis — A ar B — yra tikėtinesnis?

197. Metamas standartinis lošimo kauliukas ir stebima, kiek atvirto akučių viršutinėje sienelėje.
1) Surašykite visas šio bandymo baigtis.
2) Surašykite baigtis, palankias įvykiui:
   A — atvirtusių akučių skaičius dalijasi iš 2;
   B — atvirtusių akučių skaičius dalijasi iš 3;
   C — atvirtusių akučių skaičius nesidalija iš 3;
   D — atvirtusių akučių skaičius yra mažesnis už 10;
   E — atvirtusių akučių skaičius yra didesnis už 9.
3) Kuris įvykis yra tikėtinesnis:
   A ar B? A ar C? B ar C? D ar E? C ar D? B ar E?



Tikimybė

Gyvenime dažnai girdime žodį ***tikimýbė***.
Pavyzdžiui, sakoma, kad tikimybė gimti mergaitei ir gimti berniukui yra vienoda.
Tą tikimybę galima užrašyti procentais arba trupmenomis:

50 %; $\frac{1}{2}$; 0,5.

Nors iš tikrųjų pasaulyje berniukų gimsta truputėlį daugiau — apie 52 %...

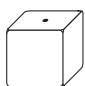
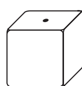
Manoma, kad tikimybių mokslo pradininkai buvo lošėjai.

Kokia tikimybė loterijoje „5 iš 36“ atspėti visus 5 skaičius iš 36?
Ta tikimybė lygi

$$\frac{1}{376992} \approx 0{,}0000027.$$

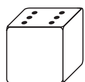
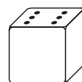
Užduotis. Metame du standartinius lošimo kauliukus. Apskaičiuojame viršutinėse sienelėse atvirtusių akučių skaičių sumą.
1) Surašykite visas taip galimas gauti sumas.

Kai abu kauliukai atvirsta viena akute į viršų, tai turime sumą:

$1 + 1 = 2$

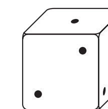
Didžiausia įmanoma suma:

$6 + 6 = 12$

2) Kaip manote, kuri iš visų tų sumų yra tikėtiniausia? kuri yra mažiausiai tikėtina?

P(atvirs 1 akutė) = $\frac{1}{6}$



- Mokysimės skaičiuoti su bandymu susijusių įvykių tikimýbes.
- Spręsime su tikimybėmis susijusius uždavinius, taikydami tikimybių savýbes.

9.1. SKAIČIUOJAME TIKIMYBES

Ant dešimties kortelių surašyti natūralieji skaičiai nuo 6 iki 15.

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Nežiūrint imama viena kortelė.

Užduotis.

1) Kas tikėtiniau: ar paimtos kortelės skaičius bus 6, ar 9?

> Yra vienodai tikėtina paimti bet kurią kortelę.

> Tikimybė paimti kortelę su skaičiumi 15 yra $\frac{1}{10}$, nes 15 užrašyta vienoje kortelėje iš dešimties.
>
> *Rašome*: **P**(paimti 15) $= \frac{1}{10}$, arba **P**(15) $= \frac{1}{10}$, arba **P** $= \frac{1}{10}$.
>
> *Skaitome*: Tikimýbė lygi vienai dešimtajai.

2) Surašykite visas galimas bañdymo baigtìs ir jų tikimýbes.

Bandymo baigtis	6	7	....	15
Baigties tikimybė				

3) Surašykite baigtis, kurios yra palankios įvykiui:
a) A — paimtos kortelės skaičius yra vienaženklis;
b) B — paimtos kortelės skaičius yra dviženklis.

> Įvykiui C — paimtos kortelės skaičius bus lyginis, yra palankios penkios baigtys: 6, 8, 10, 12, 14. Įvykio C tikimybė
>
> **P**(C) $= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$. *Skaitoma*: Įvykio C tikimybė lygi vienai antrajai.

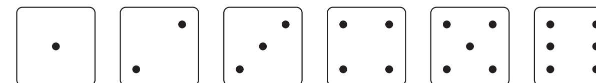
4) Kiek yra baigčių, palankių įvykiui A? B? Kuris įvykis — A ar B — tikėtinesnis? Paprastąja trupmena užrašykite, kam lygi įvykio A tikimybė; įvykio B tikimybė. Koks ženklas (>, < ar =) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio:

P(A) ☐ **P**(B)?

> Jeigu bandymas turi n vienodai galimų baigčių, o įvykiui A palankių baigčių skaičius yra m, tai įvykio A tikimybė lygi $\frac{m}{n}$.
>
> $$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$$
> ← Įvykiui A palankių baigčių skaičius
> ← Bandymo baigčių skaičius

$P(\text{⚀}) = \frac{1}{6}$

198. Metamas standartinis lošimo kauliukas, kurio sienelėse sužymėtos akutės (1, 2, 3, 4, 5 ir 6).



Stebima, kiek akučių yra viršutinėje kauliuko sienelėje.
1) Surašykite visas galimas šio bandymo baigtis. Kiek tų baigčių yra iš viso?
2) Užrašykite, kam lygi tikimybė įvykio:
A — atvirto 1 akutė,
B — atvirto 2 akutės,
C — atvirto 6 akutės.

> **P**(D — atvirto 5 akutės) $= \frac{1}{6}$

3) Kam lygi tikimybė įvykio:
E — atvirto lyginis skaičius akučių?
F — atvirto mažiau negu 3 akutės?
G — atvirto ne mažiau negu 3 akutės?

> **P**(H — atvirto nelyginis skaičius akučių) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
>
> Iš tikrųjų nelyginis skaičius (1, 3, 5) akučių yra 3 sienelėse iš 6. Todėl tikimybė kauliukui atvirsti nelyginiu skaičiumi akučių yra lygi $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

4) Kuris įvykis yra tikėtinesnis:
a) A ar E? b) A ar C? c) E ar F? d) F ar G?

199. Dėžėje yra 5 raudoni ir 6 žali rutuliai. Iš jos nežiūrint traukiamas vienas rutulys.
1) Kam lygi tikimybė įvykio:
a) A — ištrauktas raudonas rutulys? b) B — ištrauktas žalias rutulys?
c) C — ištrauktas baltas rutulys? d) D — ištrauktas nebaltas rutulys?
2) Kurio įvykio tikimybė yra didesnė:
a) A ar B? b) C ar D? c) D ar B?

200. Klasėje mokosi 24 mokiniai. Trečdalis jų yra mergaitės.
a) Mokytoja kviečia atsakinėti vieną mokinį. Kam lygi tikimybė, kad pakviesta bus mergaitė? berniukas?
b) 25 % breniukų šiandien neatėjo į mokyklą. Mokytoja dešimčiai mokinių per pamoką parašė pažymius. Kam lygi tikimybė, kad tos klasės mokinė Ona pažymio negavo?

9.2. TIKIMYBIŲ SAVYBĖS

Prisiminkime 10 kortelių su skaičiais.

6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Imama viena kortelė ir pažiūrima, koks skaičius joje užrašytas.

1 užduotis. Apskaičiuokite visų galimų šio bandymo baigčių tikimybių sumą.

Visų bandymo baigčių tikimybių suma lygi 1.

2 užduotis. Apskaičiuokite, kam lygi įvykių:
A — paimtos kortelės skaičius yra vienaženklis,
B — paimtos kortelės skaičius yra dviženklis,
tikimybių suma.

Įvykiai:
C — paimtas lyginis skaičius, D — paimtas nelyginis skaičius, yra vienas kitam *priešingi įvykiai*.
$\mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(D) = \frac{1}{2}$; $\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
Priešingųjų įvykių tikimybių suma lygi 1.

3 užduotis. Apskaičiuokite tikimybę įvykio:
a) C — paimtos kortelės skaičius yra 2;

Įvykis, kuris atliekant bandymą negali įvykti, vadinamas *negalimúoju*. Tikimybė, kad įvyks įvykis M — paimtos kortelės skaičius yra 100, yra lygi 0.
$\mathbf{P}(M) = 0 \longleftarrow$ Negãlimojo įvykio tikimybė lygi 0.

b) F — paimtos kortelės skaičius yra natūralusis iš intervalo [6; 15].

Įvykis, kuris atliekant bandymą būtinai įvyksta, vadinamas *būtinúoju*. Bū́tinojo įvykio tikimybė lygi 1.

201. Metamas standartinis lošimo kauliukas ir stebima, kiek akučių atvirto ant viršutinės sienelės.
1) Surašykite visas galimas šio bandymo baigtis ir jų tikimybes.
2) Apskaičiuokite visų galimų bandymo baigčių tikimybių sumą.
3) Pasakykite kokį nors šio bandymo:
a) negalimąjį įvykį; b) būtinąjį įvykį.
Pasakykite, kam lygios tų įvykių tikimybės.
4) Apskaičiuokite tikimybę įvykio
A — atvirtusių akučių skaičius yra didesnis už 4.
5) Suformuluokite įvykį, priešingą įvykiui A, ir apskaičiuokite jo tikimybę.

Įvykis, kuris yra priešingas įvykiui A, yra žymimas $\overline{A}$ (*sakoma*: ne A).
$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$.

202. Dėžėje yra 3 kortelės su skaitmenimis 1, 2 ir 3. Iš dėžės imama viena kuri nors kortelė ir ant atskiro lapo užrašomas kortelės skaitmuo.
a) Paimtoji kortelė į dėžę negrąžinama. Tada imama kita dėžėje esanti kuri nors kortelė ir jos skaitmuo užrašomas pirmosios kortelės skaitmens dešinėje. Taip gaunamas dviženklis skaičius.
1) Surašykite visus tokiu būdu galimus gauti dviženklius skaičius.
2) Apskaičiuokite tikimybę, kad taip sudarytas skaičius bus lyginis; bus nelyginis.
b) Paimtoji kortelė yra grąžinama į dėžę. Tada viena kuri kortelė vėl imama iš dėžės ir jos skaitmuo užrašomas pirmojo skaitmens dešinėje. Taip gaunamas dviženklis skaičius.
1) Surašykite visus tokiu būdu galimus gauti dviženklius skaičius.
2) Apskaičiuokite tikimybę, kad taip sudarytas skaičius bus lyginis; bus nelyginis.

203. Suformuluokite įvykiui A priešingą įvykį $\overline{A}$. Apskaičiuokite, kam lygu $\mathbf{P}(\overline{A})$.
a) Užrašomas dviženklis natūralusis skaičius.
Įvykis A — tas skaičius dalijasi iš 10.
b) Klasėje mokosi 10 berniukų ir 20 mergaičių. Kviečiamas atsakinėti vienas mokinys.
Įvykis A — pakviestas berniukas.
c) Moneta metama 2 kartus, kiekvieną kartą užrašant, kuria puse ji atvirto.
Įvykis A — abu kartus moneta atvirto ta pačia puse.
d) Imama viena iš kortelių, ant kurių užrašyti skaičiai:

1	2	$\sqrt{2}$	0,3	0,(3)	π	$\frac{2}{3}$

Įvykis A — paimtos kortelės skaičius yra racionalusis.

APIBENDRINAME

Įvykio tikimybė
Su bandymu susijusio įvykio A tikimybe vadiname skaičių, kurį gauname įvykiui A palankių baigčių skaičių m padaliję iš visų galimų bandymo baigčių skaičiaus n:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{m}{n}.$$

Kai metamas lošimo kauliukas, tai yra 6 galimos baigtys: atvirs 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 akutės.
Tikimybė, kad atvirs ne daugiau kaip 2 akutės, lygi $\frac{1}{3}$:
$\mathbf{P}(1 \text{ ar } 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Įvykio tikimybė yra intervalo [0; 1] skaičius:

$$0 \leqslant \mathbf{P}(\mathrm{A}) \leqslant 1.$$

Įvykis, kuris bandymo metu įvykti negali, vadinamas *negalimúoju*, o įvykis, kuris būtinai įvyksta — *būtinúoju*.

Negalimojo įvykio tikimybė lygi 0.

$\mathbf{P}(\text{atvirs } 7) = 0.$

Būtinojo įvykio tikimybė lygi 1.

$\mathbf{P}(\text{atvirs } 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ arba } 6) = 1.$

Visos bandymo baigtys, kurios nėra palankios įvykiui A, sudaro įvykiui A priešingą įvykį $\overline{\mathrm{A}}$.

A — atvirs 1 ar 2 akutės,
$\overline{\mathrm{A}}$ — atvirs 3, 4, 5 ar 6 akutės.

Vienas kitam priešingų įvykių tikimybių suma lygi 1:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) + \mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1.$$

$\mathbf{P}(1 \text{ ar } 2) + \mathbf{P}(\text{ne } 1 \text{ ir ne } 2) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1.$

Dviejų kauliukų atvirtusių akučių sumos ir sandaugos tikimybės

Prisiminkime situaciją su dviem kauliukais (žr. p. 78).
Metame du standartinius lošimo kauliukus. Apskaičiuojame viršutinėse sienelėse atvirtusių akučių skaičių sumą.

1 užduotis. 1) Pildydami lentelę, surašykite visas galimas sumas.

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3				
⚁	3					
⚂	4					
⚃						
⚄						
⚅						

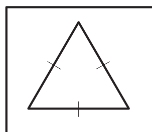
2) Surašykite visas galimas *skirtingas* šio bandymo baigtis (t. y. visas galimas sumas).
3) Apskaičiuokite kiekvienos baigties tikimybę.
4) Kuri baigtis yra tikėtiniausia?
5) Kuri baigtis yra mažiausiai tikėtina?

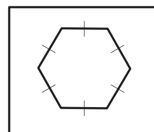
2 užduotis. 1) Kiek baigčių turi bandymas, kai skaičiuojamos dviejų kauliukų atvirtusių akučių skaičių sandaugos?
2) Kurios iš tų baigčių tikimybė yra didžiausia? Kam lygi ta tikimybė?

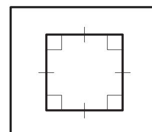
SPRENDŽIAME

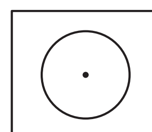
204. Ona ant lapelio užrašė dviženklį skaičių. Kokia tikimybė, kad tas skaičius yra:
a) lyginis? b) dalus iš 5? c) dalus iš 3?

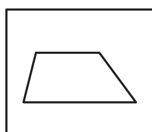
205. Ant kortelių nupieštos figūros.

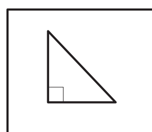

Lygiakraštis trikampis

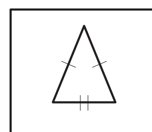

Taisyklingasis šešiakampis

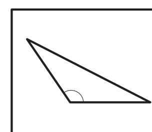

Kvadratas

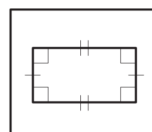

Apskritimas


Trapecija


Statusis trikampis


Lygiašonis trikampis


Bukasis trikampis


Stačiakampis

Ieva nežiūrėdama ima vieną kortelę. Kam lygi tikimybė, kad ant paimtos kortelės bus nupieštas:
a) apskritimas? b) trikampis? c) keturkampis?
d) taisyklingasis daugiakampis? e) ne daugiakampis?

206. Moneta metama du kartus ir užrašoma, kuria puse į viršų ji atvirto kiekvieną kartą.
1) Kokia tikimybė, kad dviejų metimų seka bus tokia:

a) (H) (H)? b) (H) (S)? c) (S) (H)? d) (S) (S)?

2) Kas tikėtiniau:
a) kad abu kartus atvirs herbas ar kad abu kartus atvirs skaičius?
b) kad abu kartus atvirs skaičius ar kad vieną kurį iš metimų atvirs skaičius, o kitą — herbas?

207. Kam lygi tikimybė, kad metant monetą 5 kartus:
a) visus kartus atvirs herbas?
b) ne visus kartus atvirs herbas?
c) atvirtimų seka bus SSHSH?
d) atvirtimų seka nebus HSHHH?

Moneta metama 3 kartus. Tikimybė, kad atvirs seka HSH, yra lygi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

208. Kam lygi tikimybė, kad metant kauliuką ir monetą:
a) kauliukas atvirs 6 akutėmis, o moneta herbu?
b) kauliukas atvirs lyginiu skaičiumi akučių, o moneta skaičiumi?

209. Kam lygi tikimybė, kad metant kauliuką du kartus:
a) pirmą kartą atvirs 1, o antrąjį — 6?
b) abu kartus atvirs šešetai?
c) abu kartus atvirs vienodas skaičius akučių?


210. Pabandykite įsitikinti, kad tikimybė loterijoje „5 iš 36“ atspėti visus 5 skaičius yra lygi $\frac{1}{376992}$.

Įsivaizduokite, kad išbraukėme (pažymėjome) kuriuos nors 5 kaičius iš 36.

1	2	3	~~4~~	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	~~15~~	~~16~~	17	18
19	20	21	22	~~23~~	24
25	26	27	28	29	~~30~~
31	32	33	34	35	36

Reikia apskaičiuoti, kam lygi tikimybė, kad tuos pačius skaičius pasirinks ir kompiuteris...
Apskaičiuokite, kiek yra skirtingų 5 skaičių rinkinių, kai tie skaičiai imami iš 36 skaičių. Beje, čia rinkiniai vienas nuo kito turi skirtis bent 1 skaičiumi.


211. Visi klasės mokiniai lanko bent vieną iš dviejų būrelių: šokių arba dainų. Yra žinoma, kad:
- šokių būrelį lanko 15 klasės mokinių,
- dainų būrelį lanko 17 klasės mokinių,
- tarp jų yra 6 mokiniai, kurie lanko abu būrelius.

1) Kiek mokinių yra toje klasėje?
2) Apskaičiuokite tikimybę, kad pakviestas atsakinėti tos klasės mokinys lanko:
a) šokių būrelį; b) dainų būrelį; c) ir šokių, ir dainų būrelius;
d) tik šokių būrelį; e) tik dainų būrelį.

1) Kiek klasės mokinių *tik šoka*?
Tarp 15, kurie šoka, yra 6, kurie ir dainuoja.
Vadinasi, tik šokančiųjų yra ...
2) Kiek klasės mokinių *tik dainuoja*?
3) Kiek mokinių yra klasėje?
Tik šoka + Tik dainuoja + Ir šoka, ir dainuoja = ...

TESTAS

212. Duoti trys skaitmenys: 5, 6 ir 8. Rasa iš tų skaitmenų užrašė triženklį skaičių, kurio visi skaitmenys yra skirtingi. Kam lygi tikimybė, kad Rasos skaičius yra nelyginis?

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** 1

213. Įvykio A tikimybė lygi $\frac{1}{4}$. Kam lygi įvykiui A priešingo įvykio tikimybė?

A 1 **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$

214. Kam lygi tikimybė įvykio, kad metant lošimo kauliuką atvirs pirminis skaičius akučių?

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** 0

Pirminiai skaičiai turi tik du daliklius: 1 ir save patį. Pats mažiausias pirminis skaičius yra 2.



215. Klasėje mokosi 30 mokinių, iš kurių 30 % yra mergaitės. Mokytojas kviečia atsakinėti vieną mokinį. Kokia tikimybė, kad bus pakviestas berniukas?

A $\frac{7}{10}$ **B** $\frac{3}{10}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{2}{3}$

216. Pirmoje dėžėje yra 3 balti ir 7 juodi rutuliai, o antrojoje yra 12 baltų ir 30 juodų rutulių. Tadas ima vieną rutulį iš pirmos dėžės, o Sigita ima vieną rutulį iš antrosios.

a) Kam lygi tikimybė, kad Tado rutulys bus baltas?

A $\frac{3}{7}$ **B** $\frac{7}{10}$ **C** $\frac{3}{10}$ **D** $\frac{7}{3}$

b) Kam lygi tikimybė, kad Sigitos rutulys bus juodas?

A $\frac{6}{15}$ **B** $\frac{15}{6}$ **C** $\frac{5}{7}$ **D** $\frac{2}{7}$

c) Kas tikėtiniau — ar kad Tado rutulys bus juodas, ar kad Sigitos rutulys bus juodas?

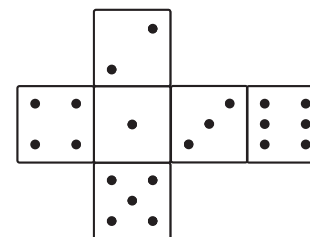
A Tikėtiniau, kad Tado rutulys bus juodas
B Tikėtiniau, kad Sigitos rutulys bus juodas
C Abi tikimybės yra vienodos
D Nustatyti neįmanoma

PASITIKRINAME

217. Pirmoje dėžėje yra 6 balti ir 4 juodi rutuliai. Antroje dėžėje yra 6 juodi ir 4 žali rutuliai.

a) Jonas iš pirmos dėžės ima vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad tas rutulys bus baltas? juodas? žalias?
b) Ona iš antros dėžės ima vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad tas rutulys bus baltas? juodas? žalias?
c) Rima iš bet kurios dėžės ima vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad tas rutulys bus baltas? juodas? žalias?

218. Pavaizduota standartinio kauliuko išklotinė.

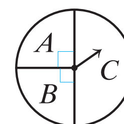


Kokia tikimybė, kad paridenus tą kauliuką:

a) viršutinės ir apatinės sienelių akučių skaičių suma bus lygi 7? 10? 6?
b) viršutinės ir apatinės sienelių akučių skaičių sandauga bus lygi 10? 6? 7?

219. Nustatykite, kurio įvykio — A ar B — tikimybė yra didesnė.

a) A — metant kauliuką atvirs lyginis skaičius akučių,
B — metant monetą atvirs skaičius;
b) A — užrašytas vienaženklis natūralusis skaičius bus pirminis,
B — užrašytas dviženklis natūralusis skaičius bus lyginis;
c) A — pasukus rodyklę, ji sustos sektoriuje A,



B — metant monetą du kartus, pirmą kartą atvirs skaičius, o antrąjį — herbas.



Baigėsi dar vieni mokslo metai. Artėja atostogos...
Bet prieš jas dar laukia paskutinis aukštas slenkstis — pagrindinės mokyklos baigiamasis egzaminas. Kaip jam pasiruošti? Pirmiausia reikia prisiminti ir pakartoti svarbiausius per 10 metų nagrinėtus faktus (kitaip sakant — teoriją). Taip pat labai svarbu įtvirtinti uždavinių sprendimo įgūdžius. Pasistenkite išspręsti kuo daugiau egzaminui skirtų užduočių, kad galėtumėte pajusti jo dvasią... Sėkmės!



Kaip ruoštis egzaminui?

Vadovėlių „Matematika Tau“ atverstiniuose „Apibendriname“ surašyti svarbiausi teorijos faktai ir juos iliustruojantys pavyzdžiai. Geriausiai būtų visus tuos atverstinius perskaityti. Bet, žinoma, tam prireiktų net 12 knygų... Kad nereikėtų teorijos ieškoti tose knygose, jos santrauką su pavyzdžiais spausdiname šioje vadovėlio dalyje. Čia taip pat rasite dvi kurso kartojimo užduotis.

Pasirengti egzaminams išleidome atskiras knygeles:



Tai bene geriausi pagalbininkai kartojant kursą ir rengiantis egzaminui.



Turinys

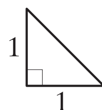
1. SKAIČIAI

Pagrindinėje mokykloje susipažinome su realiaisiais skaičiais: natūraliaisiais ir sveikaisiais, racionaliaisiais ir iracionaliaisiais.

- Klasės mokinių kiekį nurodome natūraliuoju skaičiumi.
- Temperatūrą dažnai nurodome sveikuoju skaičiumi.
- Dydžio dalį nurodome trupmena ar procentais.

  — nuspalvinta $\frac{1}{2}$ arba 0,5, arba 50 % stačiakampio.

- Stačiojo lygiašonio trikampio, kurio statinių ilgiai lygūs 1, įžambinės ilgį užrašome iracionaliuoju skaičiumi $\sqrt{2}$.



— šio trikampio įžambinės ilgis yra iracionalusis skaičius $\sqrt{2}$.

1.1. Natūraliųjų skaičių aibė N

Pats mažiausias natūralusis skaičius yra 1. Didžiausio natūraliojo skaičiaus nėra.

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Jei natūralusis skaičius k dalijasi iš natūraliojo skaičiaus n, tai n vadinamas skaičiaus k *dalikliù*, o k vadinamas skaičiaus n *kartótiniu*.

- Skaičius 5 turi du daliklius: 1 ir 5.
- Skaičius 8 turi keturis daliklius: 1, 2, 4 ir 8.
- Skaičiaus 5 kartotiniai: 5, 10, 15, ... — juos visus nusako reiškinys $5n$, čia $n \in N$.
- Skaičiaus 8 kartotiniai: 8, 16, 24, ... — juos visus nusako reiškinys $8n$, čia $n \in N$.

Natūralieji skaičiai, kurie turi tik du daliklius (vienetą ir save patį), vadinami *pirmìniais*, o skaičiai, kurie turi daugiau negu du daliklius, vadinami *sudėtìniais*.

Pirminiai skaičiai: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
Sudėtiniai skaičiai: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, ...
Skaičius 1 nelaikomas nei pirminiu, nei sudėtiniu.

Sudėtinį skaičių galima užrašyti jam lygia pirminių skaičių sandauga.
Sakoma: Sudėtinį skaičių galima išskaidyti pirminiais dauginamaisiais.

$4 = 2 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $9 = 3 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; ... .

Natūralusis skaičius k vadinamas natūraliųjų skaičių m ir n *mažiáusiuoju bendrúoju kartótiniu*, jei k yra mažiausias skaičius, kuris dalijasi ir iš m, ir iš n.
Rašoma: $\text{MBK}(m; n) = k$.

Skaičiaus 4 kartotiniai: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...
Skaičiaus 6 kartotiniai: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...
Skaičių 4 ir 6 bendrieji kartotiniai: 12, 24, 36, ...
Skaičių 4 ir 6 mažiausiasis bendrasis kartotinis yra 12.
$\text{MBK}(4; 6) = 12$.

Natūralusis skaičius d vadinamas natūraliųjų skaičių m ir n *didžiáusiuoju bendrúoju dalikliú*, jei d yra didžiausias skaičius, iš kurio dalijasi ir m, ir n.
Rašoma: $\text{DBD}(m; n) = d$.

Skaičiaus 8 dalikliai: 1, 2, 4, 8.
Skaičiaus 12 dalikliai: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Skaičių 8 ir 12 bendrieji dalikliai: 1, 2, 4.
Skaičių 8 ir 12 didžiausiasis bendrasis daliklis yra 4.
$\text{DBD}(8; 12) = 4$.

Labai dideli natūralieji skaičiai kartais rašomi *standartine išraiška*:

$$a \cdot 10^n, \quad \text{čia} \quad 1 \leqslant a < 10, \ n \in N.$$

$2\,300\,000 = 2{,}3 \cdot 10^6$; $107\,000\,000 = 1{,}07 \cdot 10^8$; $10\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{16}$.

1.2. Sveikųjų skaičių aibė Z

Natūralieji skaičiai, jiems priešingi skaičiai ir skaičius 0 sudaro sveikųjų skaičių aibę.

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Skaičiai $+a$ ir $-a$ vadinami *víenas kitám príešingais skaĩčiais*.
Skaičiui priešingą skaičių gauname parašę prieš jį minuso ženklą.

Skaičiui 5 priešingas yra skaičius -5.
Skaičiui -3 priešingas yra skaičius 3. $-(-3) = 3$
Skaičius 0 laikomas priešingu sau pačiam.

Vienas kitam priešingų skaičių suma lygi 0, t. y. $(+a) + (-a) = 0$.

1.3. Racionaliųjų skaičių aibė $\boldsymbol{Q}$

Skaičiai, kuriuos galima užrašyti paprastąja trupmena

$$\frac{a}{b}, \quad \text{čia} \quad a \in \boldsymbol{Z},\ b \in \boldsymbol{N},$$

vadinami *racionaliaĩsiais skaĩčiais*.
Paprastąją trupmeną $\frac{a}{b}$ ($a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{N}$) galima užrašyti:

- arba jai lygia *dešimtaine baigtine trupmena*,
- arba jai lygia *dešimtaine begaline periodine trupmena*.

Ir, atvirkščiai, kiekvieną dešimtainę baigtinę arba begalinę periodinę trupmeną galima užrašyti paprastąja trupmena.
Sveikąjį skaičių taip pat galima užrašyti jam lygia trupmena.

$\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\quad \frac{-7}{6} = -1{,}1(6)$; $\quad \frac{8}{3} = 2{,}(6)$;
$0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; $\quad 0{,}(2) = \frac{2}{9}$; $\quad 2{,}(15) = 2\frac{15}{99} = 2\frac{5}{33} = \frac{71}{33}$;
$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = 3{,}0$; $\quad -10 = \frac{-10}{1} = \frac{-100}{10} = -10{,}0$.

Paprastosios trupmenos reikšmė nepasikeičia jos skaitiklį ir vardiklį padauginus ar padalijus iš to paties, nelygaus 0, skaičiaus:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a : n}{b : n}, \qquad n \neq 0.$$

$\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{10}{15}$; $\quad \frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$.

Skaičiai $\frac{a}{b}$ ir $\frac{b}{a}$ vadinami vienas kitam *atvirkštìniais skaĩčiais*.
Skaičiui atvirkštinį skaičių gauname vienetą padaliję iš to skaičiaus.
Vienas kitam atvirkštinių skaičių sandauga lygi 1, t. y.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Skaičiui $\frac{3}{5}$ atvirkštinis yra $\frac{5}{3}$. $\quad 1 : \frac{3}{5} = 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

Skaičiui $-2\frac{1}{3}$ atvirkštinis yra $-\frac{3}{7}$. $\quad 1 : \left(-2\frac{1}{3}\right) = 1 : \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{3}{7}$

Skaičiai -1 ir 1 laikomi atvirkštiniais sau patiems.
Skaičius 0 atvirkštinio neturi.

Labai mažos teigiamos dešimtainės trupmenos kartais rašomos standartine išraiška: $a \cdot 10^n$, čia $1 \leqslant a < 10$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

$0{,}0000023 = 2{,}3 \cdot 10^{-6}$; $\quad 0{,}0001 = 10^{-4}$.

1.4. Iracionaliųjų skaičių aibė $\boldsymbol{I}$

Skaičiai, kurių negalima užrašyti paprastąja trupmena $\frac{a}{b}$ ($a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{N}$), vadinami *iracionaliaĩsiais skaĩčiais*.

$\sqrt{2}$; $\quad \sqrt[3]{5}$; $\quad \pi$; $\quad \sin 23°$; $\quad \cos 15°$; $\quad \operatorname{tg} 30°$.

Iracionalųjį skaičių rašant dešimtaine trupmena, gaunama dešimtainė begalinė *neperiodinė trupmena*.

$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$; $\quad \pi = 3{,}14159265\ldots$; $\quad \sin 23° = 0{,}39073112\ldots$.

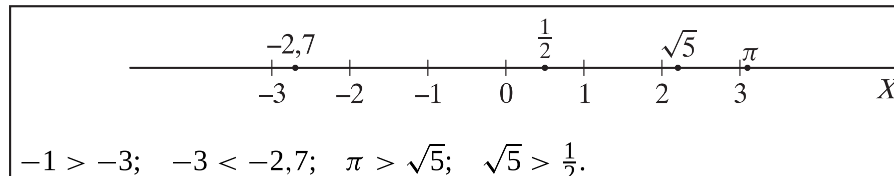
1.5. Realiųjų skaičių aibė $\boldsymbol{R}$

Racionalieji ir iracionalieji skaičiai sudaro realiųjų skaičių aibę:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}.$$

Realiųjų skaičių aibė yra racionaliųjų ir iracionaliųjų skaičių aibės junginys.

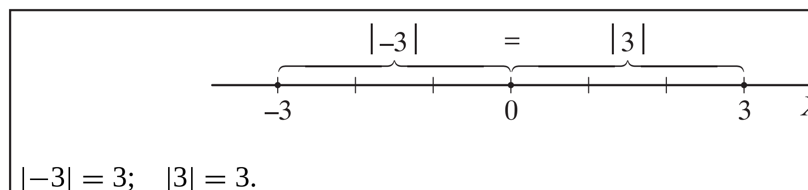
Realųjį skaičių galima pažymėti skaičių tiesės tašku.
Kuo skaičius yra didesnis, tuo skaičių tiesėje jis yra dešiniau.



$-1 > -3$; $\quad -3 < -2{,}7$; $\quad \pi > \sqrt{5}$; $\quad \sqrt{5} > \frac{1}{2}$.

Skaičiaus a modulis $|a|$ parodo, kiek tas skaičius skaičių tiesėje yra nutolęs nuo nulio.
Skaičiaus modulis yra neneigiamas dydis.

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{kai } a < 0; \\ a, & \text{kai } a \geqslant 0. \end{cases}$$



$|-3| = 3$; $\quad |3| = 3$.

2. VEIKSMAI

Su skaičiais atliekami matematiniai veiksmai:
- sudėtis ir atimtis;
- daugyba ir dalyba;
- kėlimas laipsniu ir šaknies traukimas.

Veiksmo su dviem skaičiais rezultatas yra skaičius.

$2+3=5$ (skaičių 2 ir 3 suma lygi 5);
$-3-7=-10$ (skaičių -3 ir 7 skirtumas lygus -10);
$\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$ (skaičių $\frac{2}{3}$ ir $-\frac{3}{2}$ sandauga lygi -1);
$-1:(-3)=\frac{1}{3}$ (skaičių -1 ir -3 dalmuo lygus $\frac{1}{3}$);
$2^3=8$ (skaičių 2 pakėlę 3-iuoju laipsniu, gauname 8);
$\sqrt[3]{8}=2$ (iš 8 ištraukę 3-iojo laipsnio šaknį, gauname 2).

Kai kurie veiksmai ne su visais skaičiais turi prasmę.

Dalyba $a:b$ neturi prasmės, kai $b=0$.
Kvadratinė šaknis $\sqrt{a}$ neturi prasmės, kai $a<0$.

2.1. Sudėtis ir atimtis

$a + b = c$ — a, b: Dėmenys; c: Suma

$a - b = c$ — a: Turinys; b: Atėminys; c: Skirtumas

$a+b=b+a.$

$a-b\neq b-a,$ kai $a\neq b.$

Ar teisingai atimta, galima pasitikrinti sudedant.

$5-3=2$, nes $2+3=5$;
$-10-5=-15$, nes $-15+5=-10$;
$-2-(-4)=2$, nes $2+(-4)=-2$.

Atimtį galima keisti sudėtimi su atėminiui priešingu skaičiumi:

$$a-b=a+(-b).$$

$5-3=5+(-3)=2$;
$-10-5=-10+(-5)=-15$;
$-2-(-4)=-2+4=2$.

2.2. Daugyba ir dalyba

$a \cdot b = c$ — a, b: Dauginamieji; c: Sandauga

$a : b = c$ — a: Dalinys; b: Daliklis; c: Dalmuo

$a\cdot b=b\cdot a.$

$a:b\neq b:a,$ kai $a\neq b.$

Daugybos veiksmo ženklo ($\cdot$ arba $\times$) galima nerašyti:
- tarp raidžių; $a\cdot b=ab.$
- tarp skaičiaus ir raidės; $2\cdot a=2a.$
- tarp skliaustų; $(a+b)\cdot(a-b)=(a+b)(a-b).$
- tarp skaičiaus ar raidės ir skliaustų. $2\cdot(a+b)=2(a+b).$

Dalybos veiksmo ženklą (:) galima keisti trupmenos brūkšniu:

$$a:b=\frac{a}{b}.\qquad 2:8=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

Dalybą galima keisti daugyba su dalikliui atvirkštiniu skaičiumi:

$$a:b=a\cdot\frac{1}{b}.$$

$8:2=8\cdot\frac{1}{2}=4;\quad 5:\frac{1}{2}=5\cdot\frac{2}{1}=5\cdot 2=10.$

Ar teisingai padalyta, galima pasitikrinti dauginant.

$8:2=4$, nes $4\cdot 2=8$;
$-10:\frac{1}{2}=-20$, nes $-20\cdot\frac{1}{2}=-10$;
$-8:(-4)=2$, nes $2\cdot(-4)=-8$.

Dalyba iš 0 negalimà!

Reiškinys $a:b$ turi prasmę, kai $b\neq 0$.

2.3. Kėlimas laipsniu ir šaknies traukimas

Laipsnis → a^n; n ← Laipsnio rodiklis; a ← Laipsnio pagrindas

Kvadratinė šaknis → $\sqrt{a}$; a ← Pošaknis

Laipsnis su natūraliuoju rodikliu:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}}$. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Laipsnis su nuliniu rodikliu:

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$. $5^0 = 1$.

Laipsnis su neigiamuoju natūraliuoju rodikliu:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$. $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$.

Laipsnių su sveikaisiais rodikliais savybės:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
$a^n : a^m = a^{n-m}$;
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

$5^3 \cdot 5^7 = 5^{10}$;
$5^3 : 5^7 = 5^{-4}$;
$(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3$;
$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3}$.

Kvadratine (antrojo laipsnio) šaknimi iš neneigiamo skaičiaus a vadiname neneigiamą skaičių b, kurį pakėlę antruoju laipsniu, gauname a:

$$\sqrt{a} = b, \quad \Rightarrow \quad b^2 = a \ (a \geqslant 0, b \geqslant 0).$$

$\sqrt{9} = 3$, nes $3^2 = 9$ $(9 > 0, 3 > 0)$.

Kubine (trečiojo laipsnio) šaknimi iš skaičiaus a vadiname skaičių b, kurį pakėlę trečiuoju laipsniu, gauname a:

$$\sqrt[3]{a} = b, \quad \Rightarrow \quad b^3 = a.$$

$\sqrt[3]{-8} = -2$, nes $(-2)^3 = -8$.

Šaknų savybės:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$;
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$;
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$;
$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$;
$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b} \quad (a \geqslant 0)$;
$a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$;
$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$;
$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$;
$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{2}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$;
$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$;
$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$.

3. REIŠKINIAI

Reiškiniai gali būti skaitiniai arba raidiniai.

Skaitinių reiškinių pavyzdžiai:
$-2 \cdot 3 + 1$, $(-3)^2 - \sqrt{4+8}$, $\frac{(-5+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{8}}{(5-\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3})^2}$.

Raidinių reiškinių pavyzdžiai:
$2a - 3$, $x^2 + 4x + 4$, $\frac{(a-y)^2 - a^2}{a^2 y + y}$.

3.1. Skaitiniai reiškiniai

Skaitiniai reiškiniai yra sudaromi iš skaičių, veiksmų ir skliaustų.

$$(-2)^2 \cdot 0{,}5 - \sqrt{7+1} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)$$

Šio daugybos veiksmo galima nerašyti

Skaičiaus -2 skliaustai

Sudėties veiksmo skliaustai

Jei aukščiau užrašytame reiškinyje skliaustus praleistume, tai gautume tokį reiškinį:

$$-2^2 \cdot 0{,}5 - \sqrt{7+1} \cdot \sqrt{2} + 1.$$

Atlikę skaitinio reiškinio veiksmus, gauname jo reikšmę.

$$(-2)^2 \cdot 0{,}5 - \sqrt{7+1} \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) = 4 \cdot 0{,}5 - \sqrt{8} \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) =$$
$$= 2 - \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{8} \cdot 1 =$$
$$= 2 - \sqrt{16} - \sqrt{8} =$$
$$= 2 - 4 - 2\sqrt{2} = \underline{-2 - 2\sqrt{2}};$$

$$-2^2 \cdot 0{,}5 - \sqrt{7+1} \cdot \sqrt{2} + 1 = -4 \cdot 0{,}5 - \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + 1 =$$
$$= -2 - \sqrt{16} + 1 =$$
$$= -2 - 4 + 1 = \underline{-5}.$$

3.2. Raidiniai reiškiniai (reiškiniai su kintamaisiais)

Raidiniai reiškiniai yra sudaromi iš raidžių, skaičių, veiksmų ir skliaustų. Raidinio reiškinio raidės vadinamos to *réiškinio kintamaĩsiais*.

$2a-1, \quad 3x(x-2)-x^2+5x;$	$\longleftarrow$	Reiškiniai su vienu kintamuoju
$(a+b)^2, \quad x^2-2xy+y^2;$	$\longleftarrow$	Reiškiniai su dviem kintamaisiais
$a(b+c-1), \quad \frac{x-y}{ax^2-ay^2};$	$\longleftarrow$	Reiškiniai su trimis kintamaisiais

Reiškinio su kintamaisiais reikšmės priklauso nuo kintamųjų reikšmių.

Kai: $a=1$, tai $2a-1=2\cdot 1-1=2-1=1$;
$a=0$, tai $2a-1=2\cdot 0-1=0-1=-1$;
$a=-\frac{1}{2}$, tai $2a-1=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-1-1=-2$.
Kai: $a=5$, $b=-4$, tai $(a+b)^2=\big(5+(-4)\big)^2=(5-4)^2=1^2=1$;
$a=-3$, $b=1$, tai $(a+b)^2=(-3+1)^2=(-2)^2=4$;
$a=-2$, $b=2$, tai $(a+b)^2=(-2+2)^2=0^2=0$.

Kartais reiškinį patogu pavadinti kokia nors raide ir greta tos raidės skliausteliuose užrašyti reiškinio kintamuosius. Pavyzdžiui:
$f(x)$ — reiškinys su vienu kintamuoju x;
$A(a,b)$ — reiškinys su dviem kintamaisiais a ir b.

$f(a)=2a-1, \quad \Rightarrow \quad f(1)=1,\ f(0)=-1,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2;$
$A(a,b)=(a+b)^2, \quad \Rightarrow \quad A(5,-4)=1,\ A(-3,1)=4,\ A(-2,2)=0.$

Reiškinius su kintamaisiais galima pertvarkyti (užrašyti jiems tapačiai lygiais reiškiniais).

$3x(x-2)-\left(x^2-5x\right)=3x^2-6x-x^2+5x=2x^2-x;$
$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2;$
$x^2-2xy+y^2=x^2-xy-xy+y^2=x(x-y)-y(x-y)=(x-y)\cdot(x-y)=(x-y)^2.$

Pertvarkant reiškinius, dažnai praverčia tokios lygybės:

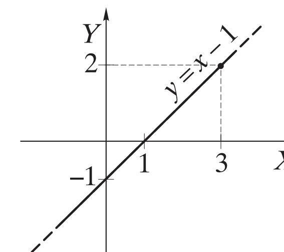
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad a^m:a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\quad \left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n},\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n};$$

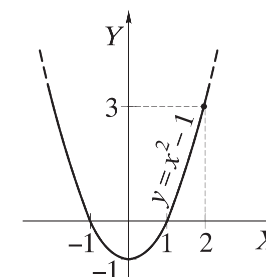
$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b},\quad \sqrt{a}:\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}},\quad a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}\ (a\geqslant 0).$$

Reiškinio su vienu kintamuoju $f(x)$ reikšmes pavaizdavę koordinačių plokštumos XOY taškais $(x;\ y)$, čia $y=f(x)$, gauname reiškinio $f(x)$ reikšmių grafiką.

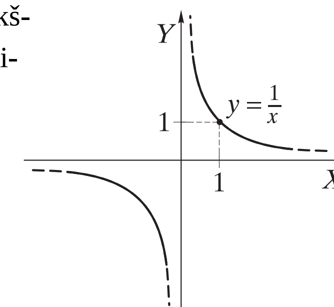
- Reiškinio $x-1$ reikšmes atitinkantys koordinačių plokštumos taškai $(x;\ x-1)$ išsidėstę tiesėje.



- Reiškinio x^2-1 reikšmes atitinkantys koordinačių plokštumos taškai $(x;\ x^2-1)$ išsidėstę kreivėje, kuri vadinama *parãbole*.



- Reiškinio $\frac{1}{x}$ reikšmes atitinkantys koordinačių plokštumos taškai $\left(x;\ \frac{1}{x}\right)$ išsidėstę kreivėse, kurios vadinamos *hipèrbole*.



4. LYGTYS

Kai ieškome reiškinio $f(x)$ tų kintamojo x reikšmių, su kuriomis reiškinio reikšmės yra lygios kokiam nors skaičiui a, tai sprendžiame lygtį $f(x) = a$.
Kai ieškome reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ tų kintamojo x reikšmių, su kuriomis abiejų reiškinių reikšmės yra lygios, tai sprendžiame lygtį $f(x) = g(x)$.

Lygties reiškinių kintamasis vadinamas *lygtiẽs nežinomúoju*.

Išspręsti lygtį — tai reiškia rasti visas lygties nežinomojo reikšmes, su kuriomis ta lygtis virsta teisinga lygybe, arba įsitikinti, kad tokių nežinomojo reikšmių nėra.
Sprendžiant lygtį, galima ją pertvarkyti:
- prie abiejų jos pusių pridėti arba atimti po tą patį skaičių ar reiškinį;
- abi jos puses dauginti arba dalyti iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus ar reiškinio.

Pagrindinėje mokykloje yra mokoma spręsti lygtis su vienu nežinomuoju, kurias galima užrašyti taip:
- $ax + b = 0$, čia a ir b — skaičiai;
- $ax^2 + bx + c = 0$, čia a, b ir c — skaičiai ir $a \neq 0$;
- $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, čia $f(x)$ ir $g(x)$ — reiškiniai su vienu kintamuoju.

4.1. Tiesinės (pirmojo laipsnio) lygtys

Lygtis, kurią galima užrašyti

$$ax + b = 0, \quad \text{čia} \quad a \text{ ir } b \text{ — skaičiai}, \; x \text{ — nežinomasis},$$

vadinama *tiesinè*, arba *pìrmojo láipsnio*, *lygtimì*.

Tiesinių (pirmojo laipsnio) lygčių pavyzdžiai:
$-2x + 6 = 0, \quad 4x - 3 = 2x, \quad 5(x - 2) = -3 - (4 - 5x)$.

Lygties $ax + b = 0$:
- reiškinio $ax + b$ reikšmių grafikas yra tiesė, todėl lygtis vadinama tiesine;
- nežinomasis x yra pirmojo laipsnio ($x = x^1$), todėl lygtis vadinama pirmojo laipsnio.

- Kai skaičiai a ir b yra nelygūs 0, tai lygtis $ax + b = 0$ turi vieną sprendinį $x = -\frac{b}{a}$.
  Iš tikrųjų:

$ax + b = 0, \quad | - b$
$ax = -b, \quad | : a$
$x = \dfrac{-b}{a}$.

$-2x + 6 = 0, \quad | - 6$
$-2x = -6, \quad | : (-2)$
$x = 3$.

- Kai $a \neq 0$, o $b = 0$, tai lygtis $ax + b = 0$ turi vieną sprendinį $x = 0$.
  Iš tikrųjų:

$ax + 0 = 0$,
$ax = 0, \quad | : a$
$x = \dfrac{0}{a}$,
$x = 0$.

$-2x = 0, \quad | : (-2)$
$x = 0$.

- Kai $a = 0$, o $b \neq 0$, tai lygtis $ax + b = 0$ *sprendinių neturi*.
  Iš tikrųjų:

$0 \cdot x + b = 0$,
$0 + b = 0$,
$b = 0$.

Kadangi $b \neq 0$, tai lygybė yra neteisinga.

- Kai $a = 0$ ir $b = 0$, tai lygties $ax + b = 0$ sprendiniai yra *visi skaičiai*.
  Iš tikrųjų:

$0 \cdot x + 0 = 0$,
$0 + 0 = 0$,
$0 = 0$.

Lygybė teisinga.

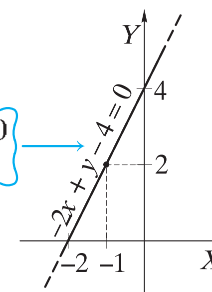
Pagrindinėje mokykloje nagrinėjamos tiesinės (pirmojo laipsnio) lygtys ne tik su vienu, bet ir su dviem nežinomaisiais. Tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais galima užrašyti taip:
$ax + by + c = 0$, čia a, b ir c — skaičiai ir $a \neq 0$, $b \neq 0$, x ir y — nežinomieji.

Tiesinių (pirmojo laipsnio) lygčių su dviem nežinomaisiais pavyzdžiai:
$x + y = 0, \quad 2x - y + 4 = 0, \quad -x + 2y = 4 + 3x$.

Lygties $ax + by + c = 0$ sprendiniai yra tos x ir y reikšmių poros $(x; y)$, su kuriomis lygtis virsta teisinga lygybe.
Tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais turi be galo daug sprendinių. Tuos sprendinius atitinkantys koordinačių plokštumos taškai $(x; y)$ išsidėstę vienoje tiesėje.

Lygties $-2x + y - 4 = 0$ sprendinius $(x; y)$ atitinkantys koordinačių plokštumos XOY taškai yra išsidėstę vienoje tiesėje.

Lygties $-2x + y - 4 = 0$ sprendinių grafikas.



4.2. Kvadratinės (antrojo laipsnio) lygtys

Lygtis, kurią galima užrašyti

$ax^2 + bx + c = 0$, čia a, b ir c — skaičiai ir $a \neq 0$, x — nežinomasis,

vadinama *kvadrãtine*, arba *añtrojo láipsnio, lygtimì*.

Kvadratinių (antrojo laipsnio) lygčių pavyzdžiai:

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 - 5x = 0$, $x^2 + 6 = 0$, $x^2 = 3(x - 1)$.

> Lygties $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) nežinomojo aukščiausias laipsnis yra antrasis (x^2), todėl lygtis vadinama antrojo laipsnio lygtimi.

Kvadratinės lygties sprendiniai priklauso nuo jos diskriminanto $D = b^2 - 4ac$.

- Kai $D > 0$, tai lygtis turi du skirtingus sprendinius:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

- Kai $D = 0$, tai lygtis turi vieną sprendinį $x = \frac{-b}{2a}$.
  Kartais sakoma, kad tokia lygtis turi du lygius sprendinius:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}.$$

- Kai $D < 0$, tai lygtis sprendinių neturi.

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Rightarrow$ $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$, $\Rightarrow$
$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5-1}{2} = \underline{2}$, $x_2 = \frac{5+1}{2} = \underline{3}$.

$x^2 - 6x + 9 = 0$, $\Rightarrow$ $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, $\Rightarrow$
$x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = \underline{3}$.

$-x^2 + x - 3 = 0$, $\Rightarrow$ $D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 1 - 12 = -11$, $\Rightarrow$
lygtis sprendinių neturi.

Kai kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ skaičius c lygus 0 (kartais sakoma: koeficientas c, arba laisvasis narys), tai turime lygtį

$$ax^2 + bx = 0.$$

Ši lygtis turi du sprendinius: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Tokią lygtį patogu spręsti kairiąją jos pusę skaidant dauginamaisiais:

$ax^2 + bx = 0$,

$x \cdot (ax + b) = 0$, $\Rightarrow$ $\underline{x = 0}$ arba $ax + b = 0$,
$ax = -b$,
$\underline{x = \frac{-b}{a}}$.

$x^2 - 5x = 0$, $\Rightarrow$ $x(x - 5) = 0$, $\Rightarrow$ $\underline{x = 0}$ arba $x - 5 = 0$,
$\underline{x = 5}$.

> Sprendinius galima rasti ir naudojantis diskriminantu (nors tai nelabai patogu):
> $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 25 - 0 = 25$,
> $x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{5-5}{2} = 0$, $x_2 = \frac{5+5}{2} = 5$.

Kai kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ skaičius b lygus 0 (kartais sakoma: koeficientas b arba koeficientas prie x, arba antrasis koeficientas), tai turime lygtį

$$ax^2 + c = 0.$$

Šios lygties sprendinių skaičius priklauso nuo skaičių a ir c ženklų:

- kai a ir c yra vienodų ženklų skaičiai (arba abu teigiami, arba abu neigiami), tai lygtis *sprendinių neturi*;
- kai a ir c yra skirtingų ženklų skaičiai (vienas teigiamas, o kitas neigiamas), tai lygtis turi du vienas kitam priešingus sprendinius: $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

$x^2 - 9 = 0$, $\Rightarrow$ $x^2 - 3^2 = 0$, $\Rightarrow$ $(x - 3)(x + 3) = 0$, $\Rightarrow$ $x - 3 = 0$, arba $x + 3 = 0$,
$\underline{x = 3}$ $\underline{x = -3}$.

$x^2 + 9 = 0$, $\Rightarrow$ lygtis sprendinių neturi, nes su visomis x reikšmėmis $x^2 \geqslant 0$, o $x^2 + 9 > 0$.

> Žinoma, tas lygtis galima spręsti ir remiantis diskriminantu:
> $x^2 - 9 = 0$, $\Rightarrow$ $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 0 + 36 = 36$, $\Rightarrow$
> $x_1 = \frac{-0-\sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{0-6}{2} = -3$, $x_2 = \frac{0+6}{2} = 3$.
> $x^2 + 9 = 0$, $\Rightarrow$ $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -36$, $\Rightarrow$ sprendinių nėra.

Kai kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ skaičiai b ir c lygūs 0, tai gauname lygtį $ax^2 = 0$, kuri turi vieną sprendinį $x = 0$.

$3x^2 = 0$, $| : 3$
$x^2 = 0$,
$x = 0$.

4.3. Trupmeninės (racionaliosios) lygtys

Lygtis, kurią galima užrašyti

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \text{čia } f(x) \text{ ir } g(x) \text{ reiškiniai, } x \text{ — nežinomasis,}$$

vadinama *trupmeninė*, arba *racionaliája*, *lygtimì*.

$\frac{x-3}{x+2} = 0, \quad \frac{5x}{x-1} + \frac{1}{x} = 0, \quad \frac{x}{2x-1} = \frac{3x}{x+1} + 1.$

Lygtį $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ galima spręsti taip:

1) rasti x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$;
2) patikrinti, ar su tomis x reikšmėmis $g(x) \neq 0$. Jei tokių x reikšmių yra, tai jas reikia atmesti — jos lygčiai netinka.

$\frac{x^2-x-6}{x-3} = 0.$
1) $x^2 - x - 6 = 0$, $D = 25$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.
2) Kai $x = -2$, tai $x - 3 \neq 0$.
Kai $x = 3$, tai $x - 3 = 0$. Vadinasi, $x = 3$ nėra lygties sprendinys.
Atsakymas. $x = -2$.

Lygtį $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ galima pakeisti tokia sistema:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

$\frac{x^2-x-6}{x-3} = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2, \ x = 3, \\ x \neq 3; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{x = -2}.$

Trupmeninės (racionaliosios) lygtys dažnai gaunamos sprendžiant vadinamuosius judėjimo ir darbo uždavinius.
Sprendžiant tuos uždavinius, praverčia formulės:

$s = v \cdot t$, čia s — kelias, v — greitis, t — laikas;
$A = d \cdot t$, čia A — darbas, d — našumas, t — laikas.

5. NELYGYBĖS

Kai ieškome reiškinio $f(x)$ tų kintamojo x reikšmių, su kuriomis reiškinio reikšmės yra mažesnės (didesnės, ne mažesnės, ne didesnės) už kokį nors skaičių a, tai sprendžiame nelygybę

$$f(x) < a \quad \big(f(x) > a,\ f(x) \geqslant a,\ f(x) \leqslant a\big).$$

Kai ieškome reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ tų kintamojo x reikšmių, su kuriomis $f(x)$ reikšmės yra mažesnės (didesnės, ne mažesnės, ne didesnės) už atitinkamas $g(x)$ reikšmes, tai sprendžiame nelygybę

$$f(x) < g(x) \quad \big(f(x) > g(x),\ f(x) \geqslant g(x),\ f(x) \leqslant g(x)\big).$$

Nelygybės reiškinių kintamasis vadinamas *nelygýbės nežìnomuoju*.

Išspręsti nelygybę — tai reiškia rasti visas nelygybės nežinomojo reikšmes, su kuriomis ta nelygybė yra teisinga, arba įsitikinti, kad tokių nežinomojo reikšmių nėra.
Sprendžiant nelygybę, galima ją pertvarkyti:

- prie abiejų jos pusių pridėti arba atimti po tą patį skaičių ar reiškinį;
- abi jos puses dauginti arba dalyti iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus. Jei šis skaičius yra neigiamas, nelygybės ženklas yra keičiamas priešingu.

Pagrindinėje mokykloje yra mokoma spręsti tiesines (pirmojo laipsnio) ir kvadratines (antrojo laipsnio) nelygybes. Jas galima užrašyti taip:

- $ax + b \gtrless 0$, čia a ir b — skaičiai ir $a \neq 0$, x — nežinomasis;
- $ax^2 + bx + c \gtrless 0$, čia a, b ir c — skaičiai ir $a \neq 0$, x — nežinomasis;

(ženklas $\gtrless$ žymi vieną iš ženklų: $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$).

5.1. Tiesinės (pirmojo laipsnio) nelygybės

Nelygybės $ax + b \gtrless 0$ ($a \neq 0$) sprendiniai yra $x \gtrless \frac{-b}{a}$. Juos patogu vaizduoti skaičių tiesėje ir rašyti intervalu.

$6x + 6 > 8x, \quad | -8x$
$-2x + 6 > 0, \quad | : (-2)$
$x - 3 < 0,$
$x < 3; \quad \Rightarrow$ [skaičių tiesė, taškas 3] $\quad \Rightarrow \quad \underline{x \in (-\infty; 3)}.$

5.2. Kvadratinės (antrojo laipsnio) nelygybės

Nelygybės $ax^2 + bx + c \gtrless 0$ $(a \neq 0)$ sprendiniai gali būti:

- vieno intervalo skaičiai;
- dviejų intervalų skaičiai.

Kvadratinė nelygybė gali neturėti sprendinių.

Jei kvadratinis trinaris ax^2+bx+c turi šaknų, tai nelygybę $ax^2+bx+c \gtrless 0$ patogu spręsti tą trinarį skaidant tiesiniais (pirmojo laipsnio) dauginamaisiais.

Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ šaknimis vadinamos tos x reikšmės, su kuriomis

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Jei trinaris $ax^2 + bx + c$ turi dvi šaknis x_1 ir x_2 (taip yra, kai $D > 0$), tai

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Jei trinaris $ax^2 + bx + c$ turi vieną šaknį x_1 (taip yra, kai $D = 0$), tai

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2.$$

$x^2 - x - 6 > 0$.
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$, $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$;
$x^2 - x - 6 = 1 \cdot \big(x - (-2)\big) \cdot (x - 3) = (x + 2)(x - 3)$.
Sprendžiame nelygybę
$(x + 2)(x - 3) > 0$.
Remiamės tuo, kad sandauga $(x+2)\cdot(x-3)$ yra teigiama (> 0), kai abu dauginamieji $(x + 2)$ ir $(x - 3)$ yra vienodų ženklų (arba abu teigiami, arba abu neigiami).
Sudarome ir išsprendžiame dvi dviejų nelygybių sistemas:

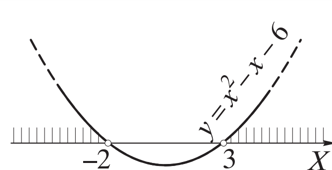
1) $\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x - 3 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x > 3; \end{cases} \Rightarrow \underline{x > 3}$;

2) $\begin{cases} x + 2 < 0, \\ x - 3 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x < 3; \end{cases} \Rightarrow \underline{x < -2}$.

Atsakymas. $x \in (-\infty; -2)$, $(3; +\infty)$.

Kvadratinę nelygybę $ax^2 + bx + c \gtrless 0$ patogu spręsti grafiškai — braižant parabolės $y = ax^2 + bx + c$ eskizą.

$x^2 - x - 6 > 0$.
Parabolė $y = x^2 - x - 6$ kerta OX ašį taškuose $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, nes su tomis x reikšmėmis $x^2 - x - 6 = 0$.
Parabolės šakos nukreiptos aukštyn (nes $1 > 0$).

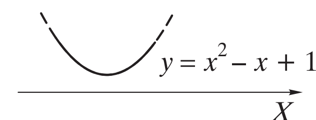


Nelygybės $x^2 - x - 6 > 0$ sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis parabolė yra virš OX ašies, t. y. $x \in (-\infty; -2)$, $(3; +\infty)$.

Grafinis būdas ypač patogus, kai kvadratinis trinaris ax^2+bx+c neturi šaknų. Tuomet parabolė $y = ax^2 + bx + c$ nekerta OX ašies. Ši parabolė išsidėsčiusi:

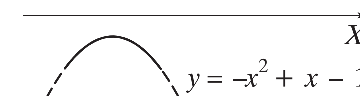
- virš OX ašies, kai $a > 0$;
- žemiau OX ašies, kai $a < 0$.

$x^2 - x + 1 > 0$, $\quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$.
Parabolė $y = x^2 - x + 1$ nekerta OX ašies. Koeficientas prie x^2 yra teigiamas $(1 > 0)$, todėl parabolės šakos nukreiptos į viršų. Taigi ši parabolė yra virš OX ašies:



Vadinasi, su visomis x reikšmėmis $x^2 - x + 1 > 0$.
Atsakymas. $x \in (-\infty; +\infty)$.
Nelygybė $x^2 - x + 1 < 0$ sprendinių neturi.

$-x^2 + x - 1 > 0$, $\quad D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 - 4 = -3 < 0$.
Parabolė $y = -x^2 + x - 1$ nekerta OX ašies. Kadangi koeficientas prie x^2 yra neigiamas $(-1 < 0)$, todėl parabolės šakos nukreiptos į apačią. Taigi ši parabolė yra žemiau OX ašies:



Vadinasi, nelygybė $-x^2 + x - 1 > 0$ sprendinių neturi.

Pastaba. Nelygybę $-x^2 + x - 1 > 0$ galima pakeisti tokia, kurioje koeficientas prie x^2 būtų teigiamas:
$-x^2 + x - 1 > 0$, $\quad | \cdot (-1)$
$x^2 - x + 1 < 0$.

6. SISTEMOS

Kai ieškome dviejų (ar daugiau) lygčių ar nelygybių bendrųjų sprendinių, tai sakome, kad sprendžiame tų lygčių ar nelygybių sistemą.
Mokykloje dažniausiai sprendžiamos:

- tiesinių nelygybių su vienu nežinomuoju sistemos;
- dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos;
- dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos, kurių viena lygtis yra tiesinė, o kita — netiesinė.

6.1. Nelygybių sistemos

Spręsdami nelygybių sistemą:
1) išsprendžiame kiekvieną sistemos nelygybę — randame jų sprendinius;
2) randame bendruosius sistemos nelygybių sprendinius.

$$\begin{cases} 2x-3>-15, \\ x+2\geqslant 2x-3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>-15+3, \\ x-2x\geqslant -3-2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>-12, \\ -x\geqslant -5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-6, \\ x\leqslant 5; \end{cases} \Rightarrow$$

$x\in(-6;\,5]$.

6.2. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos

Lygčių sistema, kurią galima užrašyti

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{čia } a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f \text{ — skaičiai } (a,b,d,e\neq 0), \\ x,\,y \text{ — nežinomieji,} \end{matrix}$$

vadinama dviejų tiesinių (pirmojo laipsnio) lygčių su dviem nežinomaisiais sistema. Tokios sistemos sprendžiamos trimis būdais:

- keitimo;
- sudėties;
- grafiniu.

Spręsdami sistemą keitimo būdu:
1) iš kurios nors lygties išreiškiame kurį nors nežinomąjį;
2) gautąją išraišką įrašome į kitą sistemos lygtį. Išsprendžiame gautąją lygtį su vienu nežinomuoju — randame to nežinomojo reikšmę;
3) įrašome gautąją nežinomojo reikšmę į kurią nors sistemos lygčių (geriausiai į 1) punkto išraišką) ir apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmę.

$$\begin{cases} 2x-y=1, & (1) \\ x+y=5; & (2) \end{cases} \Rightarrow \text{ Iš (2) lygties } x+y=5,\Rightarrow x=5-y \quad (3).$$

(3) išraišką įrašome į (1) lygtį:
$2(5-y)-y=1,\Rightarrow 10-2y-y=1,\Rightarrow -3y=-9,\ \underline{y=3}$.
Gautąją y reikšmę įrašome į (3): $x=5-3,\ \underline{x=2}$.
Atsakymas. (2; 3).

Spręsdami sistemą keitimo būdu:
1) pertvarkome lygtis (jei reikia) taip, kad prie vieno iš nežinomųjų būtų vienodi koeficientai arba jie būtų vienas kitam priešingi skaičiai;
2) atimame arba sudedame lygtis panariui. Išsprendžiame gautąją lygtį su vienu nežinomuoju — apskaičiuojame to nežinomojo reikšmę;
3) apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmę.

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ x+y=5; \end{cases} +$$

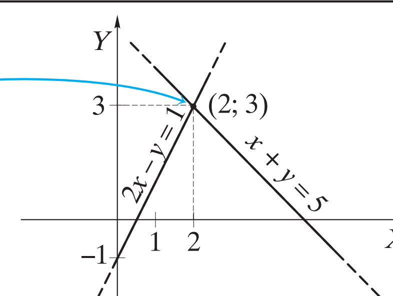
$3x=6,\Rightarrow \underline{x=2}$.
Iš lygties $x+y=5$, kai $x=2$, gauname $2+y=5$, $\underline{y=3}$.

Spręsdami sistemą grafiškai:
1) braižome abiejų sistemos lygčių sprendinių grafikus — tieses;
2) randame tų tiesių bendro taško koordinates.

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ x+y=5. \end{cases}$$



Taškas (2; 3) priklauso abiems tiesėms. Vadinasi, sistemos sprendinys yra $x=2$, $y=3$.



Atsakymas. (2; 3).

6.3. Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos, kurių tik viena lygtis yra tiesinė

Tokias sistemas sprendžiame keitimo būdu:
1) iš tiesinės lygties išreiškiame kurį nors nežinomąjį;
2) gautąją išraišką įrašome į netiesinę sistemos lygtį ir išsprendžiame gautąją lygtį su vienu nežinomuoju — apskaičiuojame to nežinomojo reikšmę;
3) gautąją nežinomojo reikšmę įrašome į 1) punkto išraišką — apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmę.

$$\begin{cases} x+y=5, & (1) \\ x^2+y^2=37; & (2) \end{cases} \quad \text{Iš (1): } x+y=5,\Rightarrow x=5-y; \quad (3)$$

(3)→(2): $(5-y)^2+y^2=37,\Rightarrow 25-10y+y^2+y^2=37,\Rightarrow$
$2y^2-10y-12=0,\Rightarrow y^2-5y-6=0,\Rightarrow$
$D=49,\ y_1=\frac{5+7}{2}=6,\ y_2=\frac{5-7}{2}=-1;$
kai $y=6$, tai $x=5-6=-1$,
kai $y=-1$, tai $x=5-(-1)=6$.
Atsakymas. (−1; 6), (6; −1).

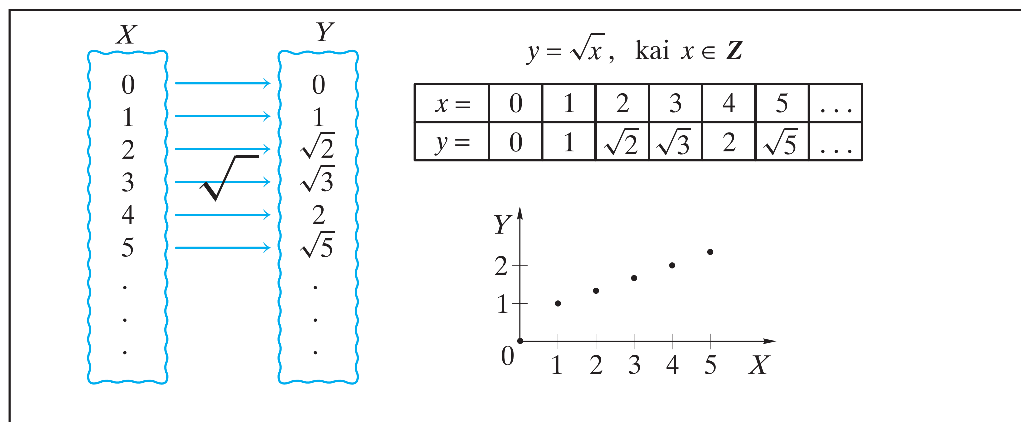
7. FUNKCIJOS

Mokykloje nagrinėjamos dviejų kintamųjų x ir y priklausomybės, kai kiekvienai x reikšmei pagal kokią nors taisyklę priskiriama vienintelė y reikšmė. Tokia y priklausomybė nuo x vadinama *fùnkcine priklausomýbe*, arba *fùnkcija*.
Rašoma: $y = f(x)$.
Galimos kintamojo x reikšmės vadinamos *fùnkcijos apibrėžìmo sritimì*, o y reikšmės — *reikšmių̃ sritimì*.
Kintamojo y funkcinė priklausomybė nuo kintamojo x gali būti:

- nusakyta žodžiais;
- užrašyta x ir y atitinkamų reikšmių lentele;
- pavaizduota koordinačių plokštumos XOY taškais;
- užrašyta reiškiniu $f(x)$.

Pagrindinėje mokykloje nagrinėjamos funkcijos $y = f(x)$, kurių reiškinys $f(x)$ yra:

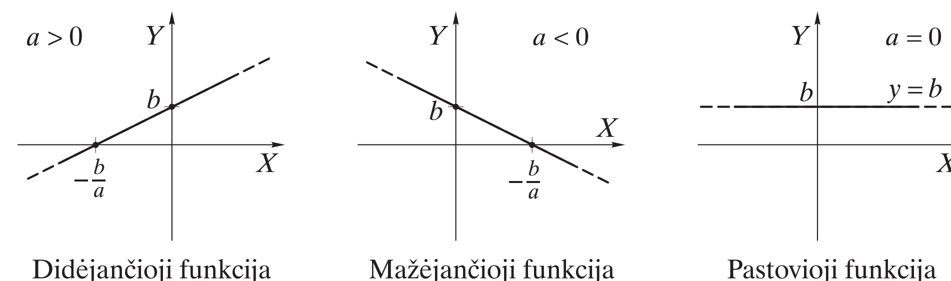
- $f(x) = ax + b$, čia a, b — skaičiai;
- $f(x) = \frac{a}{x}$, čia $a \neq 0$ skaičius;
- $f(x) = ax^2 + bx + c$, čia a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$).

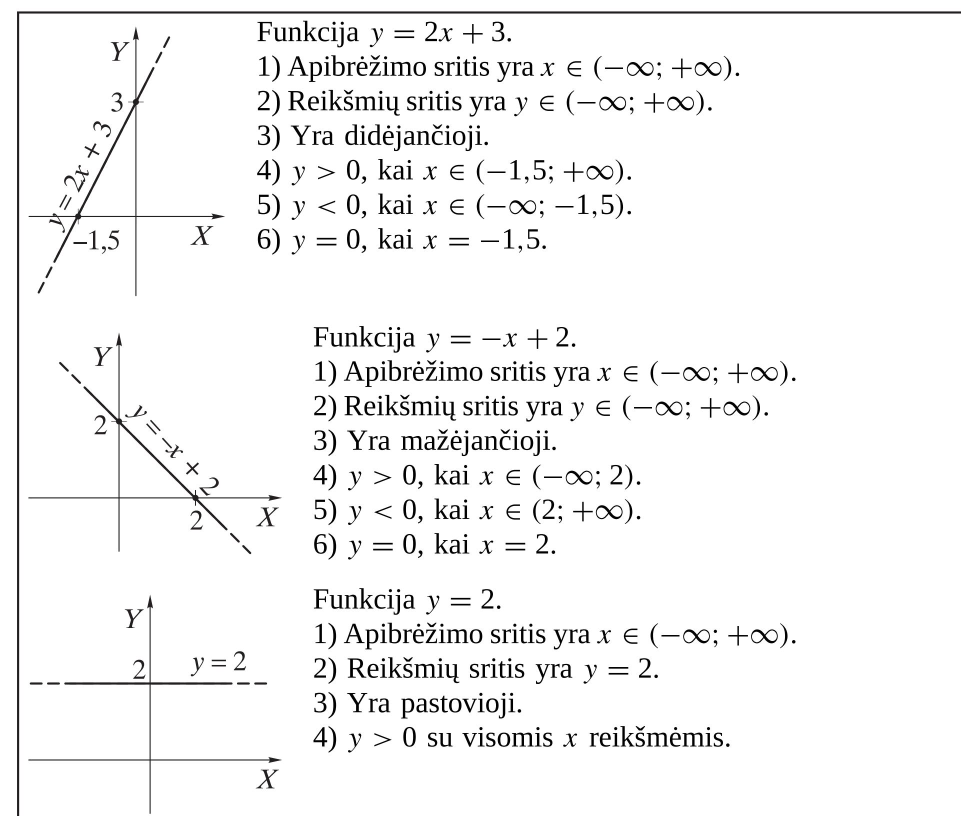


$x =$	0	1	2	3	4	5	...
$y =$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	...

7.1. Funkcija $y = ax + b$

Funkcija $y = ax + b$ vadinama *tiesinė fùnkcija*. Koordinačių plokštumoje XOY taškai $(x; ax + b)$ išsidėstę tiesėje (nelygiagrečioje su OY ašimi).





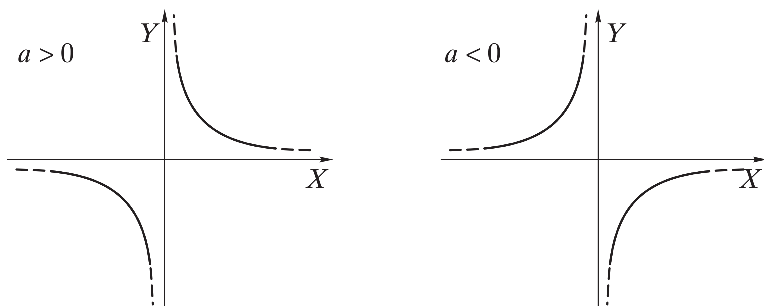
Funkcija $y = 2x + 3$.
1) Apibrėžimo sritis yra $x \in (-\infty; +\infty)$.
2) Reikšmių sritis yra $y \in (-\infty; +\infty)$.
3) Yra didėjančioji.
4) $y > 0$, kai $x \in (-1{,}5; +\infty)$.
5) $y < 0$, kai $x \in (-\infty; -1{,}5)$.
6) $y = 0$, kai $x = -1{,}5$.

Funkcija $y = -x + 2$.
1) Apibrėžimo sritis yra $x \in (-\infty; +\infty)$.
2) Reikšmių sritis yra $y \in (-\infty; +\infty)$.
3) Yra mažėjančioji.
4) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 2)$.
5) $y < 0$, kai $x \in (2; +\infty)$.
6) $y = 0$, kai $x = 2$.

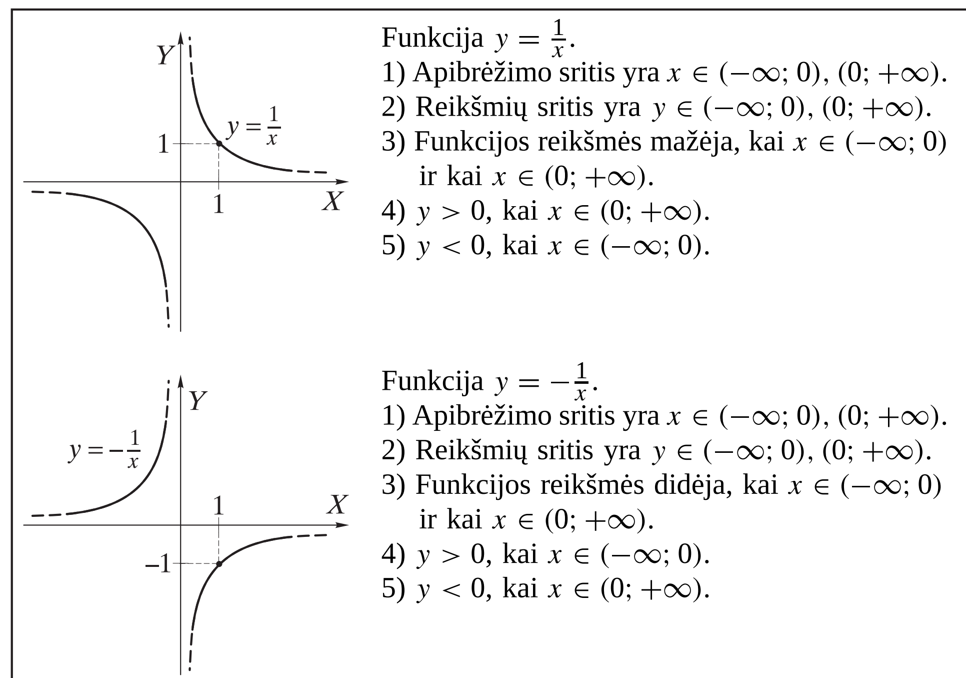
Funkcija $y = 2$.
1) Apibrėžimo sritis yra $x \in (-\infty; +\infty)$.
2) Reikšmių sritis yra $y = 2$.
3) Yra pastovioji.
4) $y > 0$ su visomis x reikšmėmis.

7.2. Funkcija $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Funkcija $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ kartais vadinama *ãtvirkščiojo proporcingùmo fùnkcija*. Koordinačių plokštumoje XOY taškai $(x; \frac{a}{x})$ išsidėstę dviejose kreivėse, kurios vadinamos *hipèrbole*.



Hiperbolės šakos:
1) nekerta koordinačių ašių;
2) yra simetriškos viena kitai koordinačių pradžios taško (0; 0) atžvilgiu.

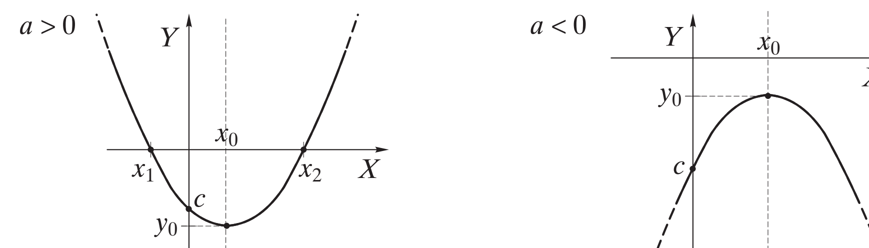


Funkcija $y = \frac{1}{x}$.
1) Apibrėžimo sritis yra $x \in (-\infty; 0), (0; +\infty)$.
2) Reikšmių sritis yra $y \in (-\infty; 0), (0; +\infty)$.
3) Funkcijos reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir kai $x \in (0; +\infty)$.
4) $y > 0$, kai $x \in (0; +\infty)$.
5) $y < 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$.

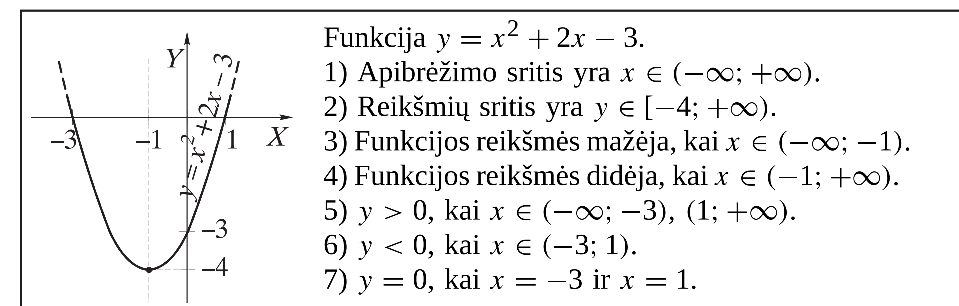
Funkcija $y = -\frac{1}{x}$.
1) Apibrėžimo sritis yra $x \in (-\infty; 0), (0; +\infty)$.
2) Reikšmių sritis yra $y \in (-\infty; 0), (0; +\infty)$.
3) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; 0)$ ir kai $x \in (0; +\infty)$.
4) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; 0)$.
5) $y < 0$, kai $x \in (0; +\infty)$.

7.3. Funkcija $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Funkcija $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ vadinama *kvadrãtine fùnkcija*. Koordinačių plokštumos XOY taškai $(x; ax^2+bx+c)$ išsidėstę kreivėje, kuri vadinama *parãbole*.

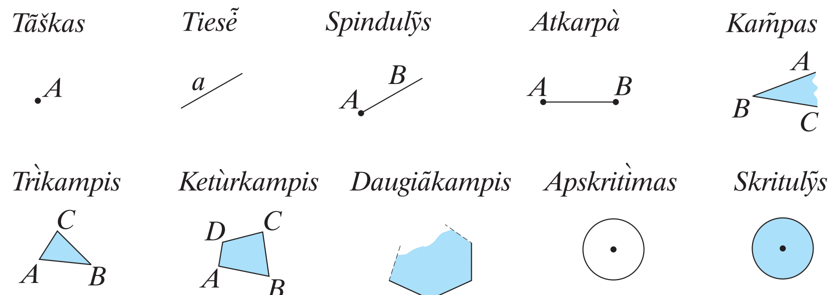


Parabolė $y = ax^2 + bx + c$:
- OY ašį kerta taške $(0; c)$;
- yra simetriška tiesės $x = -\frac{b}{2a}$ atžvilgiu;
- turi viršūnę $(x_0; y_0) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$;
- kerta OX ašį, kai $D = b^2 - 4ac > 0$;
- liečia OX ašį, kai $D = b^2 - 4ac = 0$;
- su ašimi OX neturi bendrų taškų, kai $D < 0$.



Funkcija $y = x^2 + 2x - 3$.
1) Apibrėžimo sritis yra $x \in (-\infty; +\infty)$.
2) Reikšmių sritis yra $y \in [-4; +\infty)$.
3) Funkcijos reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; -1)$.
4) Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-1; +\infty)$.
5) $y > 0$, kai $x \in (-\infty; -3), (1; +\infty)$.
6) $y < 0$, kai $x \in (-3; 1)$.
7) $y = 0$, kai $x = -3$ ir $x = 1$.

8. PLOKŠTUMOS FIGŪROS

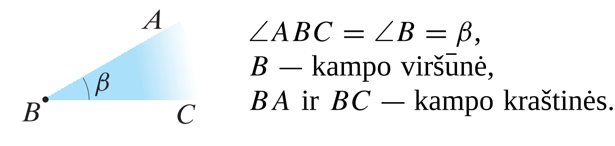


Figūrų perimetras ir plotas

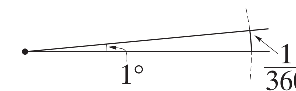
Figūra		Perimetras (P)	Plotas (S)
Trikampis		$a+b+c$	$\frac{1}{2}ah$
Lygiagretaĩnis		$2(a+b)$	ah
Stačiãkampis		$2(a+b)$	ab
Ròmbas		$4a$	ah
Kvadrãtas		$4a$	a^2
Trapècija		$a+b+c+d$	$\frac{a+b}{2}\cdot h$
Apskritimas (skritulys)		Ilgis $2\pi r$	πr^2

8.1. Kampai

Kampù vadinama plokštumos dalis, kurią riboja du spinduliai, išeinantys iš vieno taško.



$\angle ABC = \angle B = \beta$,
B — kampo viršūnė,
BA ir BC — kampo kraštinės.

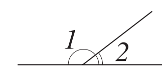


Kampų dydžiai matuojami laipsniais. Vieno laipsnio dydžio kam̃pas atitinka $\frac{1}{360}$ dalį pilnojo kampo.

Kampų rūšys

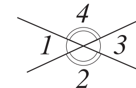
Smailusis	Statusis	Bukasis	Ištiestinis	Išvirkštinis	Pilnasis
$0° < \angle 1 < 90°$	$\angle 2 = 90°$	$90° < \angle 3 < 180°$	$\angle 4 = 180°$	$180° < \angle 5 < 360°$	$\angle 6 = 360°$

Gretutiniai



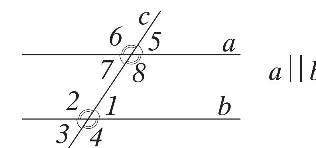
$\angle 1$ ir $\angle 2$ — gretutiniai;
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$

Kryžminiai

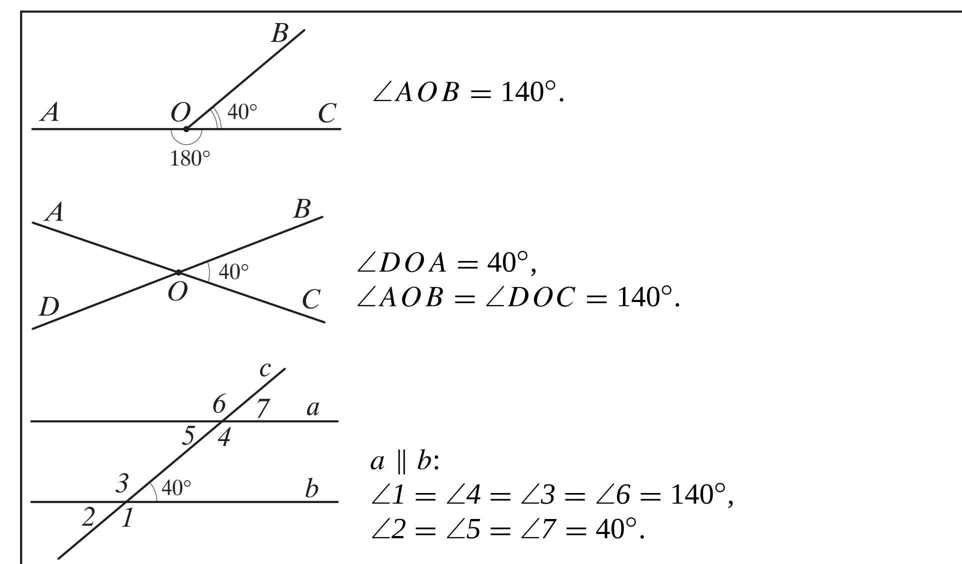


$\angle 1$ ir $\angle 3$ — kryžminiai,
$\angle 2$ ir $\angle 4$ — kryžminiai;
$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$

Lygiagečių tiesių kirstinės kampai



$\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7$;
$\angle 2 = \angle 4 = \angle 8 = \angle 6$

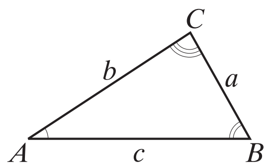


$\angle AOB = 140°$.

$\angle DOA = 40°$,
$\angle AOB = \angle DOC = 140°$.

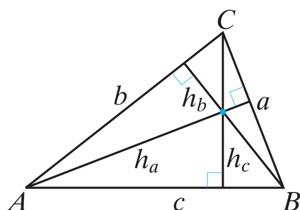
$a \parallel b$:
$\angle 1 = \angle 4 = \angle 3 = \angle 6 = 140°$,
$\angle 2 = \angle 5 = \angle 7 = 40°$.

8.2. Trikampiai



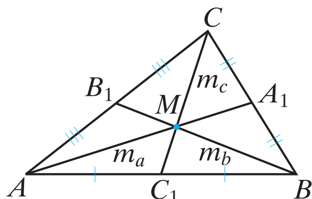
$\triangle ABC$,
A, B, C — viršūnės, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — kampai,
$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ — kraštinės,
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$,
$a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$,
$\angle A < \angle B < \angle C \iff a < b < c$.

Trikampio perimetras $P_{\triangle ABC} = a + b + c$.
Statmuo nuo trikampio viršūnės iki tiesės, kurioje yra prieš tą viršūnę esanti trikampio kraštinė, vadinamas *trìkampio aukštinè*.
Trikampio aukštìnės (arba jų tęsiniai) susikerta viename taške.



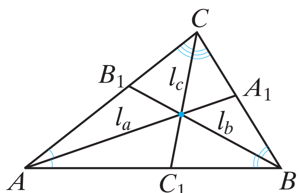
h_a — aukštinė, nubrėžta į kraštinę a,
h_b — aukštinė, nubrėžta į kraštinę b,
h_c — aukštinė, nubrėžta į kraštinę c.
Trikampio plotas
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės viduriu, vadinama *trìkampio pusiáukraštine*.
Trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške.



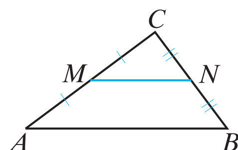
m_a — pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės A,
m_b — pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės B,
m_c — pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės C,
$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2$ — trikampio pusiaukraštinių savybė.

Trikampio kampo pusiaukampinės atkarpa nuo trikampio viršūnės iki prieš ją esančios kraštinės vadinama *trìkampio pusiáukampine*.
Trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške.



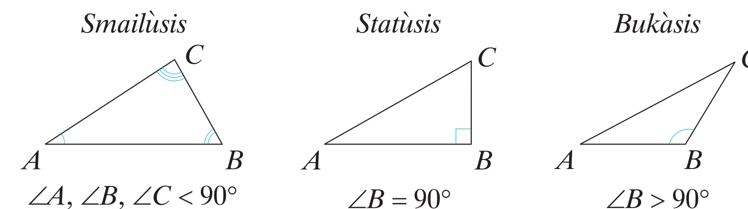
l_a — pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės A,
l_b — pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės B,
l_c — pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės C.

Atkarpa, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus, vadinama *trìkampio vìdurio lìnija*. Trikampio vidurio linija yra lygiagreti su trečiąja trikampio kraštine ir lygi jos pusei.

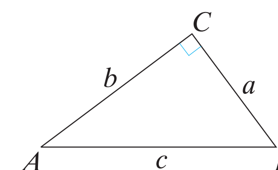


MN — vidurio linija,
$MN \parallel AB$, $MN = \frac{AB}{2}$.

Trikampių rūšys pagal kampus



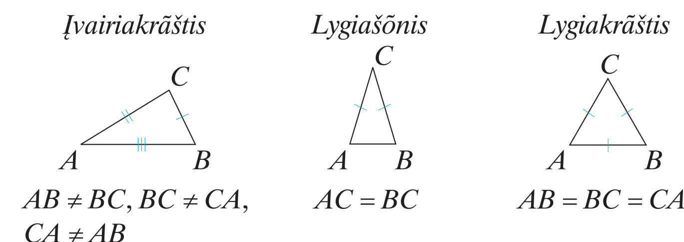
Statusis trikampis
Trikampis, kurio vienas kampas status, vadinamas *stačiúoju*.



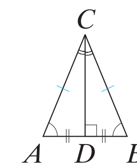
$\triangle ABC$ — status ($\angle C = 90°$),
a, b — statiniai, c — įžambinė,
$a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagoro teorema),
$\frac{a}{c} = \sin\angle A$, $\frac{b}{c} = \cos\angle A$, $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\angle A$,
$\frac{a}{c} = \cos\angle B$, $\frac{b}{c} = \sin\angle B$, $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\angle B$,
$S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}$. Jei $\angle A = 30°$, tai $a = \frac{c}{2}$.

Jeigu trikampio vienos kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai, tai tas trikampis yra statusis. (Atvirkštinė Pitagoro teorema.)

Trikampių rūšys pagal kraštines



Lygiašonis trikampis
Trikampis, kurio dvi kraštinės lygios, vadinamas *lygiašoniù*.

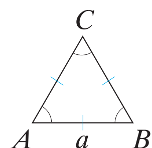


$\triangle ABC$ — lygiašonis ($AC = BC$),
AC, BC — šoninės kraštinės,
AB — pagrindas.

1. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs: $\angle A = \angle B$.
2. Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą, yra ir pusiaukraštinė, ir pusiaukampinė: $CD \perp AB$, $AD = DB$, $\angle ACD = \angle BCD$.
3. Tiesė, einanti per lygiašonio trikampio aukštinę, nubrėžtą į pagrindą, yra to trikampio simetrijos ašis (brėžinyje CD — simetrijos ašis).

Lygiakraštis trikampis

Trikampis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas *lygiakraščiu*.



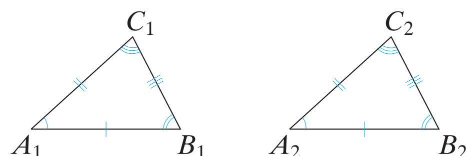
$\triangle ABC$ — lygiakraštis ($AB = BC = CA = a$), $P_{\triangle ABC} = 3a$,

$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

1. Lygiakraščio trikampio visi kampai lygūs: $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.
2. Lygiakraščio trikampio aukštinė, pusiaukraštinė ir pusiaukampinė, nubrėžtos iš vienos viršūnės, sutampa (taigi yra lygios):
   $h_a = m_a = l_a = h_b = m_b = l_b = h_c = m_c = l_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
3. Lygiakraštis trikampis turi tris simetrijos ašis. Jos eina per trikampio aukštines.

Trikampių lygumas

Du trikampiai vadinami *lygiaĩsiais*, jei juos galima sutãpdinti uždėjus vieną ant kito (gal ir apvertus). Lygiųjų trikampių atitinkamos kraštinės ir atitinkami kampai yra lygūs.

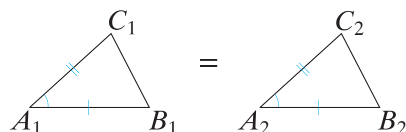


$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$,
$A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$,
$C_1A_1 = C_2A_2$, $\angle A_1 = \angle A_2$,
$\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$.

Trikampių lygumo požymiai

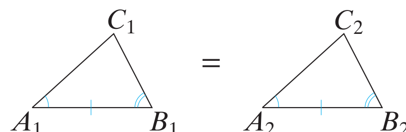
I. Trikampių lygumas pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.

Jei $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$
ir $\angle A_1 = \angle A_2$,
tai $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.



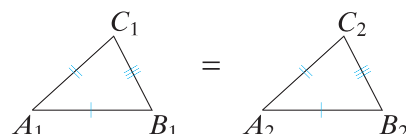
II. Trikampių lygumas pagal kraštinę ir du kampus prie jos.

Jei $A_1B_1 = A_2B_2$
ir $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$,
tai $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.



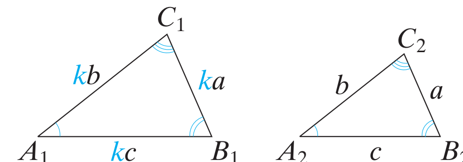
III. Trikampių lygumas pagal tris kraštines.

Jei $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$,
$C_1A_1 = C_2A_2$,
tai $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.



Trikampių panašumas

Trikampiai vadinami *panašiaĩsiais*, jei vienas gaunamas iš kito mažinant arba didinant. Panašiųjų trikampių atitinkami kampai yra lygūs, o atitinkamos kraštinės yra proporcingos.



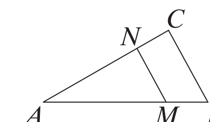
$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$,
$\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$,
$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} = k$,
k — panašumo koeficientas.

$\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle A_2B_2C_2}} = k$ — panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.

$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}} = k^2$ — panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

Tiesė, lygiagreti su viena trikampio kraštine ir kertanti kitas dvi kraštines, atkerta trikampį, panašų į duotąjį.

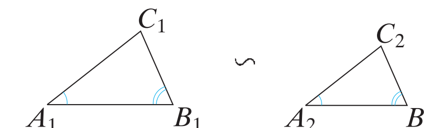
Jei $MN \parallel BC$,
tai $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$.



Trikampių panašumo požymiai

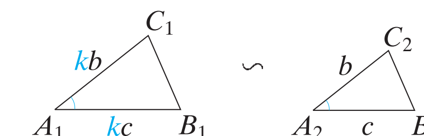
I. Trikampių panašumas pagal du kampus.

Jei $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$,
tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.



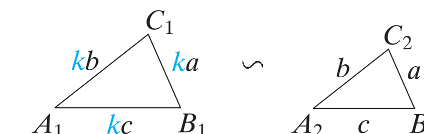
II. Trikampių panašumas pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.

Jei $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = k$ ir $\angle A_1 = \angle A_2$,
tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.

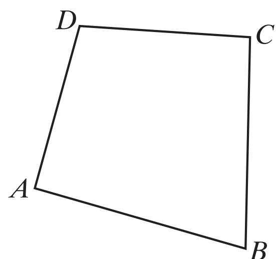


III. Trikampių panašumas pagal tris kraštines.

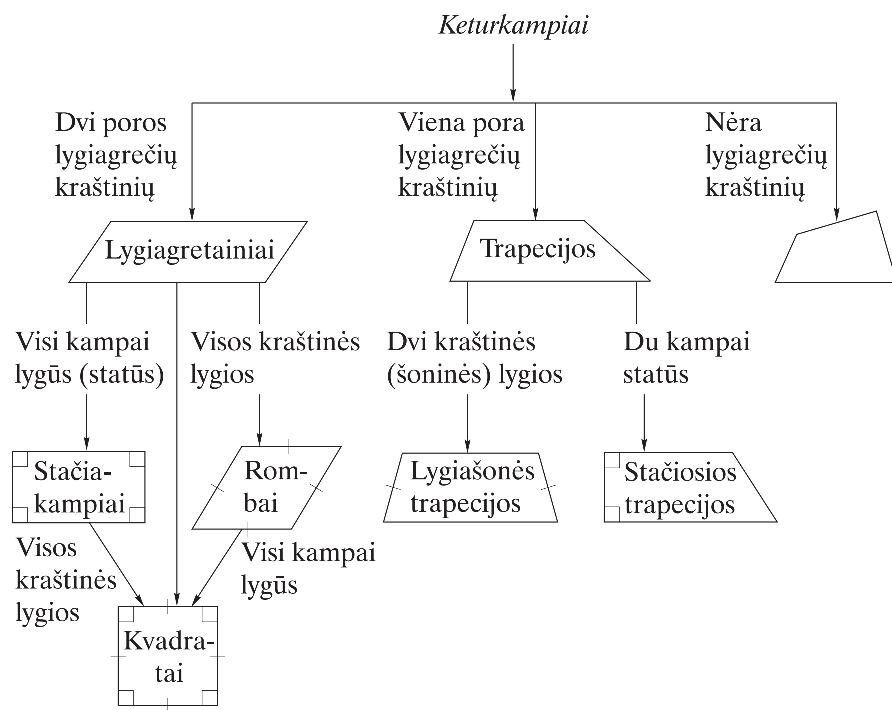
Jei $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} = k$,
tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.



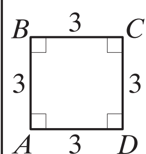
8.3. Keturkampiai



$ABCD$ — ketùrkampis;
A, B, C, D — viršūnės,
$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ — kampai,
AB, BC, CD, DA — kraštinės,
AB ir CD, AD ir BC — priešingosios kraštinės,
AC, BD — įstrižainės,
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$,
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$,
$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$.



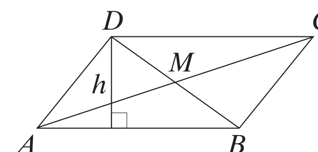
Pavaizduota figūra yra:



- keturkampis, nes turi 4 kampus;
- lygiagretainis, nes $AB \parallel CD$ ir $BC \parallel AD$;
- stačiakampis, nes visi kampai statūs;
- rombas, nes visos kraštinės lygios;
- kvadratas, nes visi kampai lygūs ir kraštinės lygios.

Lygiagretainis

Keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, vadinamas *lygiagretainiù*.

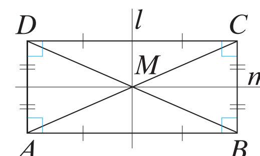


$ABCD$ — lygiagretaĩnis ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$),
AC, BD — įstrižainės, h — aukštinė,
$P_{ABCD} = 2(AB + AD)$,
$S_{ABCD} = AB \cdot h$.

1. Lygiagretainio priešingos kraštinės yra lygios: $AB = CD$, $AD = BC$.
2. Lygiagretainio priešingi kampai yra lygūs: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
3. Lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas M kiekvieną įstrižainę dalija pusiau: $AM = MC$, $BM = MD$.
4. Lygiagretainio kampų, esančių prie vienos kraštinės, suma lygi 180°: $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$.
5. Lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas (M) yra jo simetrijos centras.

Stačiakampis

Lygiagretainis, kurio visi kampai statūs, vadinamas *stačiãkampiu*.

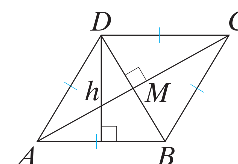


$ABCD$ — stačiakampis
($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$),
$P_{ABCD} = 2(AB + AD)$,
$S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

1. Stačiakampio įstrižainės yra lygios: $AC = BD$.
2. Tiesės, einančios per priešingų kraštinių vidurio taškus, yra stačiakampio simetrijos ašys (l ir m).
3. Stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas (M) yra jo simetrijos centras.

Rombas

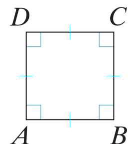
Lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas *ròmbu*.



$ABCD$ — rombas ($AB = BC = CD = DA$),
$P_{ABCD} = 4AB$,
$S_{ABCD} = AB \cdot h = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

1. Rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu ir rombo kampus dalija pusiau: $AC \perp BD$, $\angle CAB = \angle CAD$, $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle ACB = \angle ACD$, $\angle CDB = \angle ADB$.
2. Tiesės, einančios per rombo įstrižaines (AC ir BD), yra jo simetrijos ašys.
3. Rombo įstrižainių susikirtimo taškas (M) yra jo simetrijos centras.

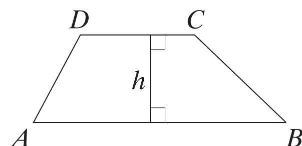
Kvadratas
Lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai statūs, vadinamas *kvadratù*. Stačiakampis, kurio visos kraštinės lygios, yra *kvadrãtas*. Rombas, kurio visi kampai statūs, yra *kvadratas*.



$ABCD$ — kvadratas
($AB = BC = CD = DA$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$),
$P_{ABCD} = 4AB$, $S_{ABCD} = AB^2$.

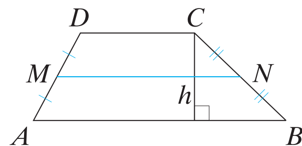
Kvadrato simetrijos ašys yra tiesės, einančios per jo įstrižaines, ir tiesės, einančios per jo priešingų kraštinių vidurio taškus. Kvadrato simetrijos centras yra taškas, kuriame susikerta jo simetrijos ašys.

Trapecija
Keturkampis, kurio dvi priešingos kraštinės yra lygiagrečios, o kitos dvi nėra lygiagrečios, vadinamas *trapècija*.



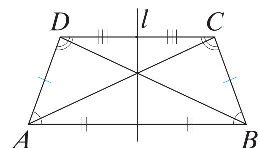
$ABCD$ — trapecija ($AB \parallel CD$, $AD \nparallel BC$),
AB, CD — pagrindai, AD, BC — šoninės kraštinės,
h — aukštinė.
$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180°$,
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$,
$S_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2} \cdot h$.

Atkarpa, jungianti trapecijos šoninių kraštinių vidurio taškus, vadinama *trapècijos vìdurio lìnija*.
Trapecijos vidurio linija yra lygiagreti su pagrindais ir lygi jų sumos pusei.



MN — vidurio linija ($AM = MD$, $BN = NC$),
$MN \parallel AB$, $MN \parallel CD$, $MN = \frac{AB+CD}{2}$.
$S_{ABCD} = MN \cdot h$.

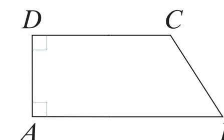
Lygiašonė trapecija
Trapecija, kurios šoninės kraštinės yra lygios, vadinama *lygiašonè trapècija*.



$ABCD$ — lygiašõnė trapècija ($AD = BC$).

1. Lygiašonės trapecijos kampai prie kiekvieno pagrindo yra lygūs: $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$.
2. Lygiašonės trapecijos įstrižainės yra lygios: $AC = BD$.
3. Tiesė l, einanti per lygiašonės trapecijos pagrindų vidurio taškus, yra jos simetrijos ašis.

Stačioji trapecija
Trapecija, kurios viena šoninė kraštinė yra statmena pagrindams, vadinama *stačiája trapècija*.

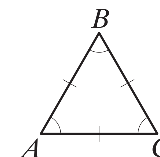


$ABCD$ — stačiója trapecija ($AD \perp AB$, $AD \perp CD$),
$S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot AD$.

8.4. Taisyklingieji daugiakampiai

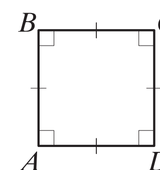
Daugiakampis, kurio visos kraštinės yra lygios ir visi kampai yra lygūs, vadinamas *taisyklinguoju daugiakampiu*.

Taisyklingasis trikampis — lygiakraštis trikampis



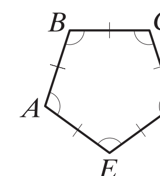
$AB = BC = CA = a$,
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Taisyklingasis keturkampis — kvadratas



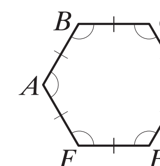
$AB = BC = CD = DA = a$,
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

Taisyklingasis penkiakampis



$AB = BC = CD = DE = EA = a$,
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 108°$.

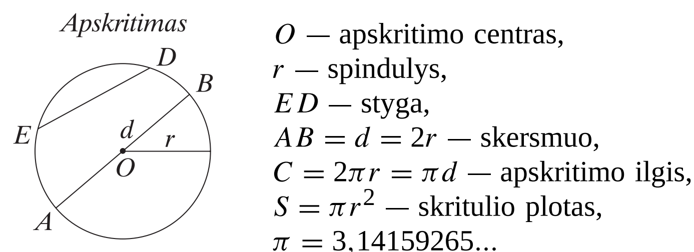
Taisyklingasis šešiakampis



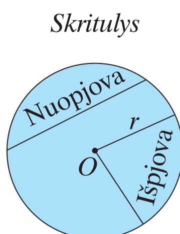
$AB = BC = CD = DE = EF = FA = a$,
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120°$.

8.5. Apskritimas, skritulys

Apskritimù vadinama figūra, kurią sudaro visi plokštumos taškai, vienodai nutolę nuo vieno taško (apskritimo centro). Plokštumos dalis, apribota apskritimu, vadinama *skrìtuliu*. Apskritimo taškai taip pat priklauso skrituliui.

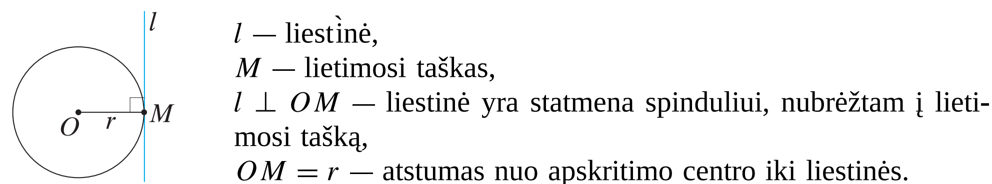


O — apskritimo centras,
r — spindulys,
ED — styga,
$AB = d = 2r$ — skersmuo,
$C = 2\pi r = \pi d$ — apskritimo ilgis,
$S = \pi r^2$ — skritulio plotas,
$\pi = 3{,}14159265...$



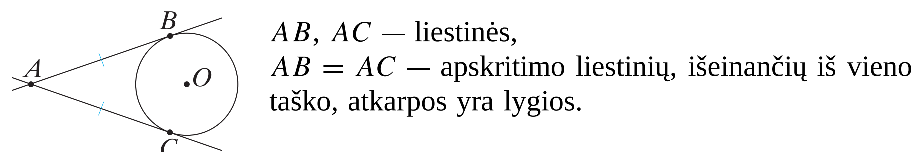
Apskritìmas (skritulỹs) turi be galo daug simetrijos ašių — tai kiekviena tiesė, einanti per jo centrą.
Apskritimo (skritulio) centras yra jo simetrijos centras.

Apskritimas ir tiesė
Jei apskritimas su tiese turi tik vieną bendrą tašką, tai ta tiesė vadinama *apskritìmo liestinė*.



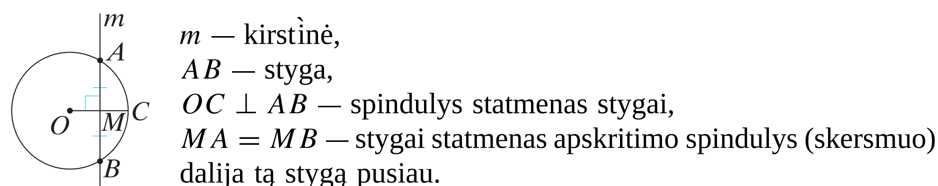
l — liestìnė,
M — lietimosi taškas,
$l \perp OM$ — liestinė yra statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką,
$OM = r$ — atstumas nuo apskritimo centro iki liestinės.

Per tašką, esantį šalia apskritimo, galima nubrėžti dvi liestines.



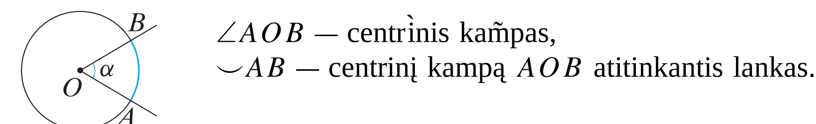
AB, AC — liestinės,
$AB = AC$ — apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpos yra lygios.

Jei apskritimas su tiese turi du bendrus taškus, tai ta tiesė vadinama *apskritimo kirstinė*.



m — kirstìnė,
AB — styga,
$OC \perp AB$ — spindulys statmenas stygai,
$MA = MB$ — stygai statmenas apskritimo spindulys (skersmuo) dalija tą stygą pusiau.

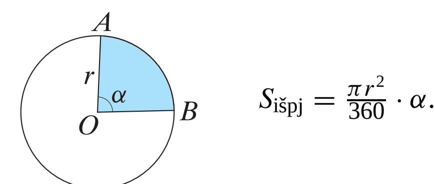
Apskritimas ir kampas
Jei apskritimo centras sutampa su kampo viršūne, tai tas kampas vadinamas *centriniù kampù*.



$\angle AOB$ — centrìnis kam̃pas,
$\smile AB$ — centrinį kampą AOB atitinkantis lankas.

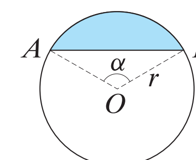
$\smile AB = \alpha$ — lanko dydis (laipsniais) lygus jį atitinkančio centrinio kampo dydžiui ($\angle AOB = \alpha$);
$\smile AB = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha$ — ilgis (ilgio vienetais) lanko, atitinkančio α laipsnių centrinį kampą;
$S_{\text{išpj}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$ — plotas išpjovos, atitinkančios α laipsnių centrinį kampą.

Skritulio išpjova ir nuopjova
Centrinis kampas skritulį dalija į dvi dalis, kurios vadinamos *ìšpjovomis*.

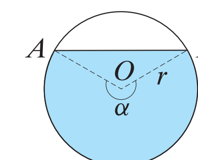


$S_{\text{išpj}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha.$

Skritulio styga skritulį dalija į dvi dalis, kurios vadinamos *núopjovomis*.



$S_{\text{nuopj}} = S_{\text{išpj}} - S_{\triangle AOB}$
($\alpha < 180°$);



$S_{\text{nuopj}} = S_{\text{išpj}} + S_{\triangle AOB}$
($\alpha > 180°$).

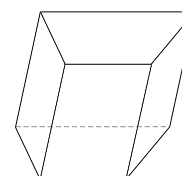
9. ERDVINIAI KŪNAI

Erdvinių kūnų paviršiaus plotas ir tūris

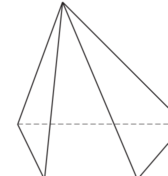
Kūnas	Paviršiaus plotas (S_{pav})	Tūris (V)
Prìzmė (pasviróji)	$S_{šon} + 2S_{pagr}$	$S_{pagr} \cdot H$
Prizmė (stačióji)	$S_{šon} + 2S_{pagr}$	$S_{pagr} \cdot H$
Stačiakam̃pis gretasiẽnis	$2(ab + ac + bc)$	abc
Kùbas	$6a^2$	a^3
Piramìdė	$S_{šon} + S_{pagr}$	$\frac{1}{3} S_{pagr} \cdot H$
Ritinỹs	$S_{šon} + 2S_{pagr} = 2\pi r H + 2\pi r^2 = 2\pi r(H + r)$	$\pi r^2 H$
Kū̃gis	$S_{šon} + S_{pagr} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 H$

Kūną, apribotą daugiakampiais, vadiname *briaunainiù*.

Prizmė



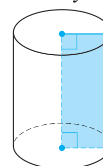
Piramidė



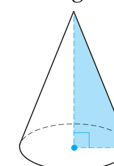
Erdviniai kūnai, kurie gaunami sukant plokštumos figūrą apie pasirinktą tiesę, vadinami *sukiniaĩs*.

Stačiakampį sukdami apie jo kraštinę gauname *rìtinį*, statųjį trikampį sukdami apie jo statìnį — *kū̃gį*, pusskritulį sukdami apie jo skersmenį — *rùtulį*.

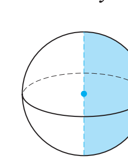
Ritinys



Kūgis



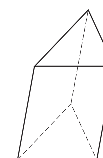
Rutulys



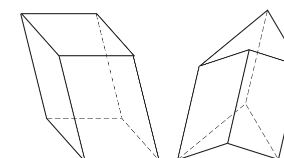
9.1. Prizmė

Prizmè vadinamas briaunainis, kurio dvi sienos, vadinamos pagrindais, yra lygūs daugiakampiai, o kitos sienos (šoninės) — lygiagretainiai, kurių kiekvieno viena kraštinė yra viename pagrinde, o priešinga — kitame.

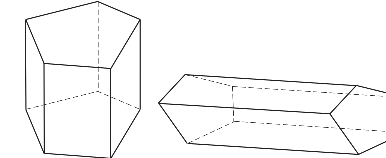
Trikampė prizmė



Keturkampės prizmės

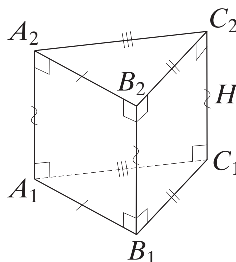


Penkiakampės prizmės



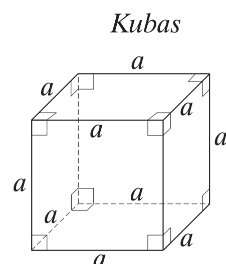
Prizmės, kurių visos šoninės sienos yra stačiãkampiai, vadinamos *stačiõsiomis prìzmėmis*. Stačiosios prizmės šoninė briauna vadinama jos *aukštinė*.

Trikampė stačioji prizmė $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$.
Pagrindai: $\triangle A_1B_1C_1$ ir $\triangle A_2B_2C_2$ (lygūs trikampiai).
Šoninės sienos: $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $C_1C_2A_2A_1$ (stačiakampiai).
Aukštinės: $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = H$.
Pagrindo plotas $S_{\text{pagr}} = S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle A_2B_2C_2}$.
Šoninio paviršiaus plotas
$S_{\text{šon}} = S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{B_1C_1C_2B_2} + S_{C_1C_2A_2A_1}$.
Viso paviršiaus plotas $S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + 2S_{\text{pagr}}$.
Tūris $V = S_{\text{pagr}} \cdot H$.

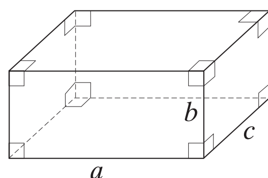


Kubas ir stačiakampis gretasienis yra stãčiosios prìzmės.
Kubo visos sienos yra lygūs kvadratai.
Stačiakampio gretasienio priešingosios sienos yra lygūs stačiakampiai.

Kubas



Stačiakampis gretasienis



$S_{\text{pav}} = 6a^2$,
$V = a^3$;

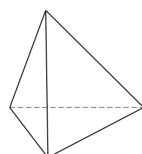
$S_{\text{pav}} = 2(ab + ac + bc)$,
$V = abc$.

Stačioji prizmė, kurios pagrindas yra *taisyklìngasis daugiãkampis*, vadinama *taisyklìngaja prizmè*.
Kubo pagrindai yra taisyklingieji keturkampiai (kvadratai), todėl kubas yra taisyklingoji keturkampė prizmė.

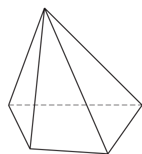
9.2. Piramidė

Piramidè vadinamas briaunainis, kurio viena siena yra bet koks daugiakampis, o kitos sienos — trikampiai, turintys bendrą viršūnę. Tų trikampių kraštinės, esančios prieš bendrą viršūnę, sutampa su daugiakampio kraštinėmis.

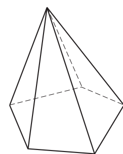
Trikampė piramidė



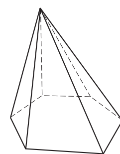
Keturkampė piramidė



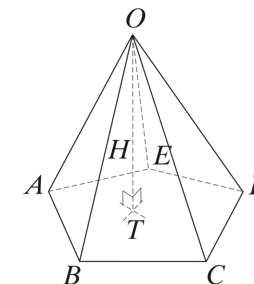
Penkiakampė piramidė



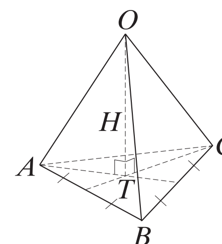
Šešiakampė piramidė

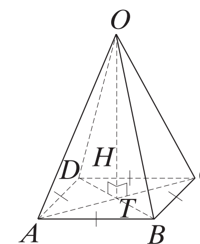


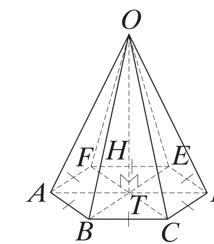
Penkiakampė piramidė $OABCDE$.
Piramidės viršūnė O.
Piramidės pagrindas $ABCDE$.
Šoninės sienos: OAB, OBC, OCD, ODE, OEA.
Šoninės briaunos: OA, OB, OC, OD, OE.
Piramidės aukštinė $OT = H$ — statmuo iš piramidės viršūnės į pagrindo plokštumą.
Pagrindo plotas $S_{\text{pagr}} = S_{ABCDE}$.
Šoninio paviršiaus plotas
$S_{\text{šon}} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle ODE} + S_{\triangle OEA}$.
Viso paviršiaus plotas $S_{\text{pav}} = S_{\text{pagr}} + S_{\text{šon}}$.
Tūris $V = \frac{1}{3}S_{\text{pagr}} \cdot H$.



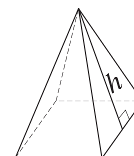
Piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o aukštinė eina per pagrindo centrą, vadinama *taisyklìngaja piramidè*.





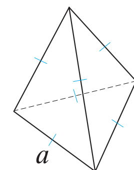


Taisyklingosios piramidės šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai. Šoninės sienos aukštinė, išvesta iš piramidės viršūnės, vadinama *apotemà*.
Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindo perimetro ir apotėmos sandaugos pusei.



$S_{\text{šon}} = \frac{1}{2}P \cdot h$;
čia P — pagrindo perimetras,
h — apotemos ilgis.

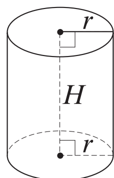
Piramidė, kurios visos keturios sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, vadinama *tetraedrù*.



$S_{\text{šon}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$,
$S_{\text{pav}} = \sqrt{3}a^2$,
$V = \frac{1}{3}S_{\text{pagr}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

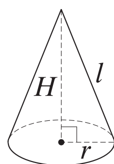
9.3. Ritinys

H — aukštinė,
r — pagrindo spindulys,
$S_{pagr} = \pi r^2$,
$S_{šon} = 2\pi r H$,
$S_{pav} = S_{šon} + 2S_{pagr} = 2\pi r H + 2\pi r^2 = 2\pi r(H + r)$,
$V = \pi r^2 H$.



9.4. Kūgis

H — aukštinė,
r — pagrindo spindulys,
l — sudãromoji,
$S_{pagr} = \pi r^2$,
$S_{šon} = \pi r l$,
$S_{pav} = S_{šon} + S_{pagr} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$,
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.



10. STATISTIKA

Statistika — tai mokslas apie informacijos rinkimą, sisteminimą, analizavimą ir interpretavimą. Daugumai žodis „statistika“ primena gausybę skaičių ir diagramų.



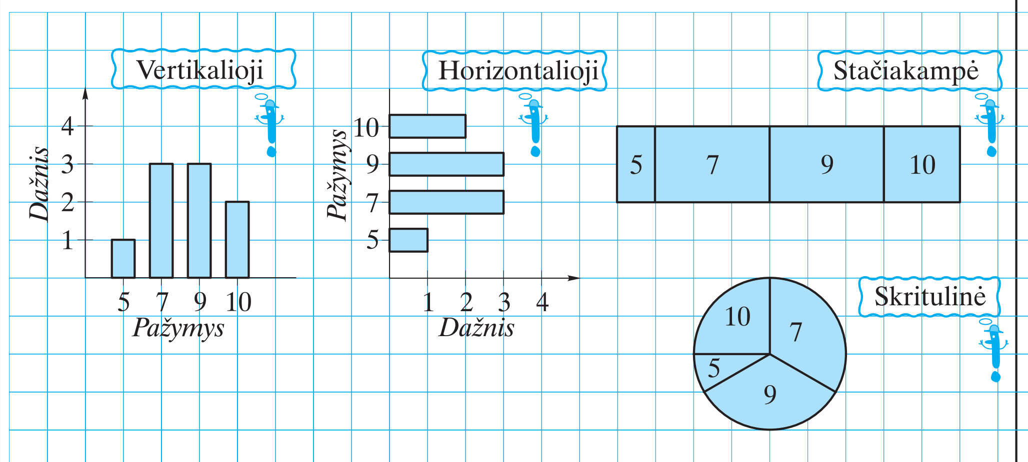
Surinkti duomenys vadinami *imtimì*.
Duomenis dažnai patogu sурašyti nemažėjimo tvarka — *variãcine eilutė*.
Kai yra pasikartojančių duomenų, tai juos patogu pateikti *dãžnių lentelė*.
Duomenys dažnai pateikiami (vaizduojami) diagramomis: stulpẽline, stačiakampė, skritulinė, linijinė.
Imtį apibūdina tam tikri skaičiai — skaĩtinės charakterìstikos:

- *imtiẽs dỹdis* — duomenų skaičius;
- *didžiáusiasis duomuõ*;
- *mažiáusiasis duomuõ*;
- *imtiẽs plõtis* — didžiausiojo ir mažiausiojo duomenų skirtumas;
- *vidùrkis* — duomenų suma, padalyta iš duomenų skaičiaus;
- *medianà* — skaičius, už kurį ne didesni ne mažiau kaip pusė duomenų ir už kurį ne mažesni ne mažiau kaip pusė duomenų;
- *modà* — dažniausiai pasikartojantis imties duomuo.

Pažymiai: 5, 7, 9, 10, 9, 9, 7, 7, 10 — imtis.
Pažymių variacinė eilutė: 5, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10.
Pažymių dažnių lentelė:

PAŽYMYS	5	7	9	10
DAŽNIS	1	3	3	2

Pažymių diagramos:



Pažymių imties dydis lygus 9, nes yra 9 pažymiai.
Didžiausias duomuo lygus 10, mažiausias — 5.
Pažymių imties plotis lygus 5, nes $10 - 5 = 5$.
Pažymių vidurkis lygus 8, nes $\frac{5\cdot1+7\cdot3+9\cdot3+10\cdot2}{1+3+3+2} = \frac{73}{9} = 8,(1) \approx 8$.
Pažymių mediana lygi 9, nes $\underline{5, 7, 7, 7}, 9, \underline{9, 9, 10, 10}$.
↑
Mediana

Imties mediana nustatoma taip:
1) duomenys surašomi nemažėjimo tvarka (variacine eilute);
2) jei duomenų skaičius yra *nelyginis*, tai mediana lygi viduriniam duomeniui;
3) jei duomenų skaičius yra *lyginis*, tai mediana lygi dviejų vidurinių duomenų sumos pusei.

Pažymių modos yra dvi: 7 ir 9.

Imtis gali turėti vieną modą, daugiau negu vieną modą arba neturėti modos.

11. KOMBINATORIKA

Matematikos sritis, kurioje tiriama, kiek skirtingų rinkinių, tenkinančių vienokias ar kitokias sąlygas, galima sudaryti iš turimų objektų, vadinama *kombinatòrika*.

Rinkinių skaičių kartais galima nustatyti:
- surašant rinkinius;
- sudarant lentelę;
- braižant galimybių medį;
- remiantis daugybos taisykle.

Kiek yra skirtingų pietų komplektų (sriubos ir antrojo patiekalo), jei renkamės iš:
- *3 rūšių sriubos (burokėlių, kopūstų ir pieniškos);*
- *2 antrųjų patiekalų (žuvies ir mėsos)?*

1. Surašykime visus rinkinius:

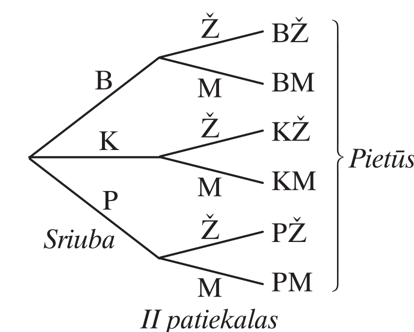
Burokėliai + Žuvis, Burokėliai + Mėsa;
Kopūstai + Žuvis, Kopūstai + Mėsa;
Pieniška + Žuvis, Pieniška + Mėsa.
} ← 6 skirtingi variantai.

2. Sudarykime lentelę:

II patiekalas; *Sriuba*

Sriuba	Ž	M
B	BŽ	BM
K	KŽ	KM
P	PŽ	PM

3. Nubraižykime galimybių medį:



4. Kadangi yra 3 rūšių sriubos (pasirinkimų skaičius lygus 3) ir 2 rūšių antrieji patiekalai (pasirinkimų skaičius lygus 2), tai galima pasirinkti $3 \cdot 2 = 6$ skirtingus tų patiekalų komplektus.

Atsakymas. 6 skirtingi pietų komplektai.

12. TIKIMYBĖS

Matematikos sritis, nagrinėjanti bandymus, kurie gali būti pakartoti tomis pačiomis sąlygomis kiek norima kartų, ir niekada iš anksto nežinoma, koks bus konkretus bandymo rezultatas (baigtis) kaskart, kai jis bus pakartotas, vadinama *tikimýbių teòrija*.



Nusakant bandymą, reikia skirti, kas *atliekama* ir kas *stebima*.
Visas galimas *bañdymo baigtìs* įprasta rašyti riestiniuose skliaustuose $\{\ldots,\ldots,\ldots\}$.
Tikimybių teorijoje nagrinėjami su bandymais susiję *į́vykiai*. Įvykis yra nusakomas jam palankiomis baigtimis.
Jei bandymas turi n skirtingų vienodai tikėtinų baigčių, tai kiekvienos baigties tikimybė lygi $\frac{1}{n}$. (*Rašoma*: $\mathbf{P} = \frac{1}{n}$.)

Visų bandymo baigčių tikimybių suma lygi 1.

Jei su tuo bandymu susijusiam įvykiui A palankių baigčių skaičius lygus m, tai įvykio A tikimybė lygi $\frac{m}{n}$. (*Rašoma*: $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{m}{n}$.)

Visos bandymo baigtys, kurios nėra palankios įvykiui A, sudaro įvykiui A priešingą įvykį $\overline{\mathrm{A}}$. Vienas kitam priešingų įvykių tikimybių suma lygi 1:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) + \mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1.$$

Ant kortelių surašyti vienaženkliai natūralieji skaičiai:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Imama viena kortelė ir pažiūrima, koks skaičius joje užrašytas.

Šis bandymas turi 9 baigtis: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Kiekvienos baigties tikimybė lygi $\frac{1}{9}$.
Įvykiui A — paimta kortelė su lyginiu skaičiumi, yra palankios 4 baigtys: $\{2, 4, 6, 8\}$.
Įvykio A tikimybė lygi $\frac{4}{9}$. (*Rašoma*: $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{4}{9}$.)
Įvykiui $\overline{\mathrm{A}}$ yra palankios 5 baigtys: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
Įvykio $\overline{\mathrm{A}}$ tikimybė $\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{5}{9}$.

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) + \mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

13. MATAI

Ilgio vienetai

1 kilometras = 1000 metrų (1 km = 1000 m)
1 metras = 10 decimetrų (1 m = 10 dm)
1 decimetras = 10 centimetrų (1 dm = 10 cm)
1 centimetras = 10 milimetrų (1 cm = 10 mm)

Ploto vienetai

1 kvadratinis kilometras = 1 000 000 kvadratinių metrų (1 km^2 = 1 000 000 m^2)
1 kvadratinis metras = 10 000 kvadratinių centimetrų (1 m^2 = 10 000 cm^2)
1 kvadratinis centimetras = 100 kvadratinių milimetrų (1 cm^2 = 100 mm^2)
1 hektaras = 10 000 kvadratinių metrų (1 ha = 10 000 m^2)
1 aras = 100 kvadratinių metrų (1 a = 100 m^2)

Tūrio vienetai

1 kubinis kilometras = 1 000 000 000 kubinių metrų (1 km^3 = 1 000 000 000 m^3)
1 kubinis metras = 1 000 000 kubinių centimetrų (1 m^3 = 1 000 000 cm^3)
1 kubinis centimetras = 1000 kubinių milimetrų (1 cm^3 = 1000 mm^3)
1 litras = 1 kubiniam decimetrui (1 ℓ = 1 dm^3)

Greičio vienetai

1 kilometras per valandą = 1000 metrų per valandą $\left(1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}\right)$
$= \frac{1000}{60}$ metrų per minutę $\left(1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{50}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}\right)$
$= \frac{1000}{3600}$ metrų per sekundę $\left(1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{5}{18}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$
$= \frac{1}{60}$ kilometro per minutę $\left(1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{60}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}\right)$
$= \frac{1}{3600}$ kilometro per sekundę $\left(1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{3600}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right)$

Masės vienetai

1 tonà = 1000 kilogrãmų (1 t = 1000 kg)
1 kilogramas = 1000 gramų (1 kg = 1000 g)
1 gramas = 1000 miligramų (1 g = 1000 mg)
1 ceñtneris = 100 kilogramų (1 cnt = 100 kg)

Tankio vienetai

1 kilogramas į kubinį metrą = 0,001 gramo į kubinį centimetrą $\left(1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \frac{1}{1000}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$

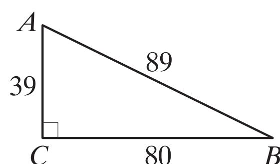
1. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $0{,}8 - 0{,}08$; (1 taškas)

b) $3{,}5 \cdot 2\frac{2}{3}$; (1 taškas)

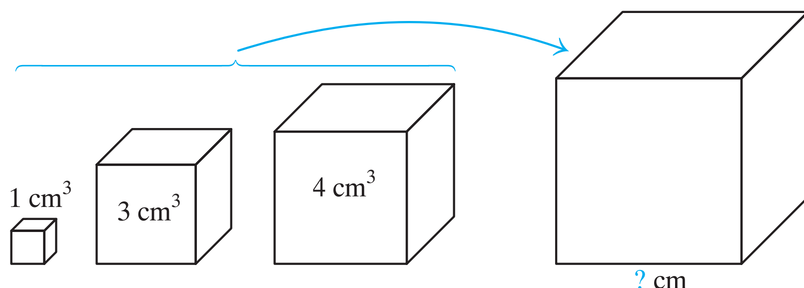
c) $(\sqrt{3} - 2)^2 + (2 - \sqrt{3})^2$. (2 taškai)

2.



a) $\sin\angle A = \ldots$; (1 taškas)
b) $\cos\angle B = \ldots$; (1 taškas)
c) $\operatorname{tg}\angle A = \ldots$. (1 taškas)

3. Trys variniai kubeliai, kurių tūriai yra $1\,\text{cm}^3$, $3\,\text{cm}^3$ ir $4\,\text{cm}^3$, sulydyti į vieną kubą. Koks yra gautojo kubo briaunos ilgis? (2 taškai)



4. Suprastinkite reiškinį.

a) $\frac{10x - x}{3}$; (2 taškai)

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{1-x}$. (2 taškai)

5. Išspręskite lygtį.

a) $2x - 15 = 3x + 7$; (1 taškas)

b) $x^2 - 13x + 22 = 0$; (2 taškai)

c) $\frac{1}{x} - \frac{x}{2} = 3$. (2 taškai)

6. Išspręskite nelygybę.

a) $2x - 2 \leqslant 2$; (1 taškas)

b) $x^2 - x > 0$; (2 taškai)

c) $-x^2 - x + 2 \leqslant 0$. (2 taškai)

7. Išspręskite lygčių sistemą.

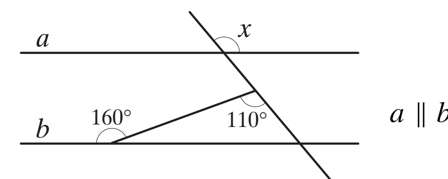
$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$$ (2 taškai)

8. Atkarpos MN galų koordinatės yra $M(2; -5)$, $N(-3; 7)$. Apskaičiuokite atkarpos MN vidurio taško koordinates. (2 taškai)

9. Raketa skrenda į Marsą 42 000 km/h greičiu. Per kiek mėnesių raketa pasieks Marsą, jei iki jo yra $1{,}2 \cdot 10^8$ km? Atsakymą pateikite vieno mėnesio tikslumu (imkite, kad mėnuo turi 30 dienų). (2 taškai)

10. Už dvi knygas Vita sumokėjo 44 litus. Kiek kainavo brangesnioji knyga, jei ji 75 % brangesnė už kitą knygą? (2 taškai)

11. Remdamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite kampo x dydį.



$a \parallel b$ (2 taškai)

12. Suprastinkite trupmeną

$$\frac{x - 1 - \frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x-1} + 1}.$$ (2 taškai)

13. Surašykite visas nesuprastinamas paprastąsias trupmenas su vardikliu 12, kurios yra tarp skaičių $\frac{1}{3}$ ir $\frac{3}{4}$. (2 taškai)

14. Apskaičiuokite trikampio ABC kampų dydžius, jei $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 5 : 6$.

(2 taškai)

15. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio viso paviršiaus plotą ir tūrį, kai jo matmenys decimetrais yra $0{,}2 \times 0{,}4 \times 0{,}5$. (2 taškai)

16. Dėžėje yra 360 pieštukų. Vieni pieštukai yra raudoni, kiti — juodi. Tikimybė iš tos dėžės ištraukti raudoną pieštuką yra lygi $\frac{2}{5}$. Apskaičiuokite:

a) kiek raudonų pieštukų yra dėžėje; (1 taškas)

b) kokia tikimybė iš tos dėžės ištraukti juodą pieštuką. (1 taškas)

17. Per darbo dieną dažytojui teko iš pirmo aukšto lipti į:

- dešimtą aukštą 5 kartus;
- penktą aukštą 10 kartų.

Į kelintą aukštą būtų užlipęs dažytojas, jei jis nebūtų leidęsis žemyn? (3 taškai)

1. Apskaičiuokite.

a) $\frac{8}{15}-\frac{1}{4}$; (2 taškai)

b) $-2\frac{1}{7}:\left(-\frac{4}{7}\right)$; (3 taškai)

c) $6\frac{2}{3}-|-6|$; (2 taškai)

d) $\sqrt{5^2-4^2}$; (2 taškai)

e) $\sqrt{8}-\sqrt{2}$. (2 taškai)

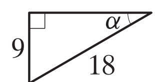
2. Skaičius x yra 300 % didesnis už skaičių $3\frac{2}{7}$. Raskite x. (2 taškai)

3. Apskaičiuokite reiškinio $\frac{7{,}85\cdot 10^6}{31{,}4\cdot 10^2}$ reikšmę. Atsakymą užrašykite standartine išraiška. (2 taškai)

4. Šviesos greitis yra apie 300 000 km/s. Atstumas nuo Saulės iki Žemės yra apie 144 milijonus kilometrų. Per kiek minučių Saulės išspinduliuota šviesa pasiekia Žemę? (2 taškai)

5. Kokiu kampu pasisuka laikrodžio valandinė rodyklė per $2\frac{2}{3}$ val.? (2 taškai)

6. Raskite kampo α dydį. Atsakymą pagrįskite. (2 taškai)

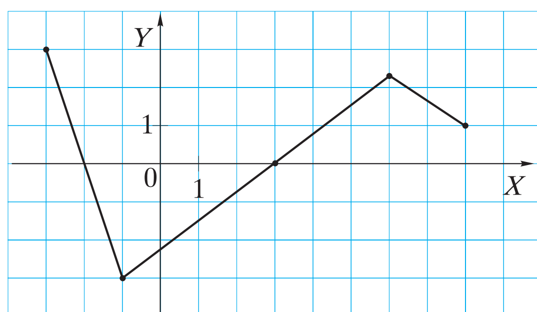


7. Išskaidykite dauginamaisiais.

a) x^2-5^2; (1 taškas)

b) $3x^2y+12y^2$. (2 taškai)

8. Pavaizduotas funkcijos $y=f(x)$ grafikas.



Nustatykite:

a) funkcijos apibrėžimo sritį; (1 taškas)

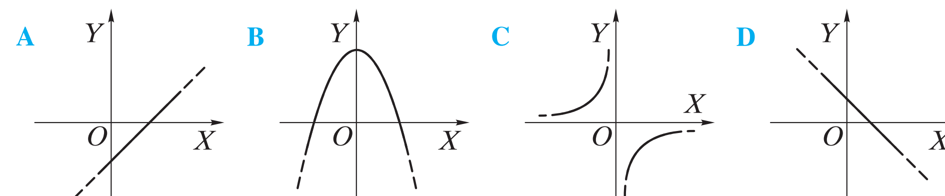
b) funkcijos reikšmių sritį; (1 taškas)

c) funkcijos reikšmių didėjimo intervalą; (1 taškas)

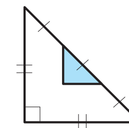
d) x reikšmes, su kuriomis $f(x)<0$; (1 taškas)

e) funkcijos didžiausią reikšmę. (1 taškas)

9. Kuris iš pateiktų grafikų yra funkcijos $f(x)=-3x+2$ grafikas? (1 taškas)



10. Pavaizduotas $9\,m^2$ ploto statusis lygiašonis trikampis. Jo įžambinė padalyta į 3 lygias dalis. Vidurinė dalis yra nuspalvinto stačiojo lygiašonio trikampio įžambinė. Raskite nuspalvinto trikampio plotą. (3 taškai)



11. Moneta metama 3 kartus, kiekvieną kartą užrašant, kuria puse ji atvirsta (S — skaičiumi, H — herbu).

1) Surašykite visas bandymo baigtis. (2 taškai)

2) Apskaičiuokite tikimybę, kad pirmuoju metimu atvirs herbas. (2 taškai)

12. Pilna statinė medaus sveria 40 kg. Ta pati statinė, kai medus užima jos trečdalį, sveria 20 kg. Apskaičiuokite, kiek sveria tuščia statinė ir statinėje telpantis medus. (3 taškai)

13. Žmonių grupei buvo užduotas klausimas: „Kiek laikraščių perkate per savaitę?“. Apklausos duomenys pateikti lentelėje.

Laikraščių skaičius	1	3	7	x
Žmonių skaičius	10	5	1	2

Žinoma, kad vienas žmogus vidutiniškai perka 3 laikraščius per savaitę.

1) Kiek žmonių dalyvavo apklausoje? (1 taškas)

2) Apskaičiuokite x reikšmę. (1 taškas)

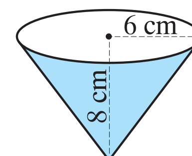
3) Kiek laikraščių per savaitę nuperka šie žmonės? (1 taškas)

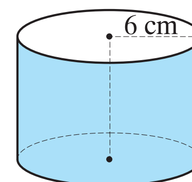
14. Išspręskite nelygybę ir jos sprendinius užrašykite intervalu.

a) $x \geqslant 2x-3$; (2 taškai)

b) $3x^2-4x+1>0$. (3 taškai)

15. Bendrovė gamina vienodo tūrio, bet skirtingos formos (kūgio ir ritinio) popierines dėžutes (be dangtelių). Abiejų kūnų pagrindų spinduliai lygūs 6 cm, kūgio aukštinė lygi 8 cm.





1) Parodykite, kad kūgio formos dėžutės tūris lygus $288\,cm^3$. (2 taškai)

2) Koks ritinio formos dėžutės aukštis? (3 taškai)

3) Kurios dėžutės gamybai reikia mažiau popieriaus? (6 taškai)

Skaičiuodami vietoj π imkite 3.

6 skyrius

58. a) 1; b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$; c) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$; d) 0; e) 1; f) 1.

59. a) $BC\approx 1{,}7$ cm, $AC\approx 9{,}8$ cm; b) $8{,}6\text{ cm}^2$; c) 1,7 cm;
d) 5 cm; 0,9 cm; 4,9 cm.

60. a) $5\sqrt{2}$ cm; b) $20+10\sqrt{2}$ cm; c) $100\sqrt{2}+50\text{ cm}^2$; d) $20+5\sqrt{2}$ cm.

61. a) $\sin\alpha=\frac{a}{c}$; b) $\sin\beta=\frac{b}{c}$; c) $\cos\alpha=\frac{b}{c}$; d) $\cos\beta=\frac{a}{c}$; e) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$; f) $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$.

62. a) $\angle B=55°$, $AC\approx 1{,}6$ cm, $BC\approx 1{,}1$ cm;
b) $\angle A=70°$, $AB\approx 5{,}8$ cm, $BC\approx 5{,}5$ cm;
c) $BC\approx 2{,}2$ cm, $\angle A\approx 48°$, $\angle B\approx 42°$;
d) $AB\approx 4{,}1$ cm, $\angle A\approx 14°$, $\angle B\approx 76°$.

63. $\approx 13{,}9$ m.

64. $AB\approx 7{,}3$ cm, $AD\approx 12{,}7$ cm.

65. ≈ 80 m.

66. ≈ 7 dm.

7 skyrius

116. a) 72°, 288°; b) 135°, 225°; c) 160°, 200°.

117. 1) 1,5 dm; 2) 2 dm; 3) 5 dm.

118. 1) 15 cm^2; 2) 72 cm^2; 3) 90 cm^2; 4) 96 cm^2.

119. $5\sqrt{7}$ cm.

120. $AC=AB=\sqrt{60{,}75}$ cm, $\angle BAO=\angle CAO=30°$.

121. 60°.

122. 60°.

123. 15 cm.

124. $6\pi\text{ cm}^2$.

125. $\frac{25}{4}\pi\text{ cm}^2$.

126. $10\sqrt{3}$ cm.

127. a) $\frac{5}{3}\pi$ cm; b) $\frac{5}{2\sqrt{2}}\pi=\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi$ cm; c) $\frac{10}{3\sqrt{3}}\pi=\frac{10\sqrt{3}}{9}\pi$ cm.

128. Nukentės (dvigubai).

129. $\approx 17°$.

130. ≈ 690 cm.

8 skyrius

181. 1) a) **C**; b) **A**; c) **B**; 2) 120°.

182. 1) 4 cm ir 6 cm; 2) $2\sqrt{3}$ cm ir $3\sqrt{3}$ cm; 3) 30°.

183. ≈ 20 dm; 30°.

184. 30 cm.

185. 1) $4\sqrt{3}$ cm; 2) 24 cm^2; 3) 96 cm^3.

186. 1) 45°; 2) $15\sqrt{2}$; 3) $\approx 18{,}37$; 4) $\approx 55°$.

187. 1) $2\sqrt{21}$; 2) 66°.

188. $2\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

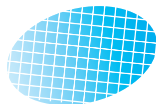
189. 1) ≈ 18 cm; 2) ≈ 18 cm; 3) ≈ 26 cm; 4) ≈ 21 cm; 5) $\approx 51°$.

9 skyrius

217. a) $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; 0; b) 0; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$.

218. a) 1; 0; 0; b) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 0.

219. a) Abiejų įvykių tikimybės yra vienodos ($=\frac{1}{2}$);
b) B;
c) abiejų įvykių tikimybės yra vienodos ($=\frac{1}{4}$).



6 skyrius

58. a) 1; b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$; c) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}$; d) 0; e) 1; f) 1.

59. a) $BC \approx 1{,}7$ cm, $AC \approx 9{,}8$ cm; b) $8{,}6$ cm^2; c) $1{,}7$ cm;
d) 5 cm; 0,9 cm; 4,9 cm.

60. a) $5\sqrt{2}$ cm; b) $20+10\sqrt{2}$ cm; c) $100\sqrt{2}+50$ cm^2; d) $20+5\sqrt{2}$ cm.

61. a) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; b) $\sin\beta = \frac{b}{c}$; c) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; d) $\cos\beta = \frac{a}{c}$; e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; f) $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$.

62. a) $\angle B = 55°$, $AC \approx 1{,}6$ cm, $BC \approx 1{,}1$ cm;
b) $\angle A = 70°$, $AB \approx 5{,}8$ cm, $BC \approx 5{,}5$ cm;
c) $BC \approx 2{,}2$ cm, $\angle A \approx 48°$, $\angle B \approx 42°$;
d) $AB \approx 4{,}1$ cm, $\angle A \approx 14°$, $\angle B \approx 76°$.

63. $\approx 13{,}9$ m.

64. $AB \approx 7{,}3$ cm, $AD \approx 12{,}7$ cm.

65. ≈ 80 m.

66. ≈ 7 dm.

7 skyrius

116. a) 72°, 288°; b) 135°, 225°; c) 160°, 200°.

117. 1) 1,5 dm; 2) 2 dm; 3) 5 dm.

118. 1) 15 cm^2; 2) 72 cm^2; 3) 90 cm^2; 4) 96 cm^2.

119. $5\sqrt{7}$ cm.

120. $AC = AB = \sqrt{60{,}75}$ cm, $\angle BAO = \angle CAO = 30°$.

121. 60°.

122. 60°.

123. 15 cm.

124. 6π cm^2.

125. $\frac{25}{4}\pi$ cm^2.

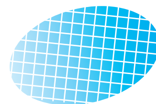
126. $10\sqrt{3}$ cm.

127. a) $\frac{5}{3}\pi$ cm; b) $\frac{5}{2\sqrt{2}}\pi = \frac{5\sqrt{2}}{4}\pi$ cm; c) $\frac{10}{3\sqrt{3}}\pi = \frac{10\sqrt{3}}{9}\pi$ cm.

128. Nukentės (dvigubai).

129. $\approx 17°$.

130. ≈ 690 cm.



8 skyrius

181. 1) a) **C**; b) **A**; c) **B**; 2) 120°.

182. 1) 4 cm ir 6 cm; 2) $2\sqrt{3}$ cm ir $3\sqrt{3}$ cm; 3) 30°.

183. ≈ 20 dm; 30°.

184. 30 cm.

185. 1) $4\sqrt{3}$ cm; 2) 24 cm^2; 3) 96 cm^3.

186. 1) 45°; 2) $15\sqrt{2}$; 3) $\approx 18{,}37$; 4) $\approx 55°$.

187. 1) $2\sqrt{21}$; 2) 66°.

188. $2\sqrt{3}$ cm^2.

189. 1) ≈ 18 cm; 2) ≈ 18 cm; 3) ≈ 26 cm; 4) ≈ 21 cm; 5) $\approx 51°$.

9 skyrius

217. a) $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; 0; b) 0; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$.

218. a) 1; 0; 0; b) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 0.

219. a) Abiejų įvykių tikimybės yra vienodos ($=\frac{1}{2}$);
b) B;
c) abiejų įvykių tikimybės yra vienodos ($=\frac{1}{4}$).